Е. В. Болданова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Байкальский государственный университет экономики и права

Е. В. Болданова

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

Иркутск
Издательство БГУЭП
2015

УДК 519.86(075.8)
ББК 22.17я7
Б79

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета экономики и права

Рецензенты канд. техн. наук, доц. О. И. Горбунова
канд. экон. наук, доц. А. Ю. Беликов

Болданова Е. В.
Б79 Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Е. В. Болданова. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2015. – 139 с.

Рассмотрены эконометрические, экономико-математические модели, в том числе оптимизационные задачи, теория принятия решений, теория игр, имитационное моделирование, балансовые модели, теория массового обслуживания, задачи сегментации, задачи исследования производственных функций, экспертные модели.

Для студентов всех форм обучения по направлению «Экономика предприятий нефтегазового комплекса».

УДК 519.86(075.8)
ББК 22.17я7

© Болданова Е. В., 2015
© Издательство БГУЭП, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1.1. Понятие эконометрики

Сегодня деятельность в любой области экономики (управлении, финансово-кредитной сфере, маркетинге, учете, аудите) требует от специалиста применения современных методов работы, знания достижений мировой экономической мысли, понимания научного языка. Большинство новых методов основано на эконометрических моделях, концепциях, приемах. Без глубоких знаний эконометрики научиться их использовать невозможно. Чтение современной экономической литературы также предполагает хорошую эконометрическую подготовку.

Специфической особенностью деятельности экономиста является работа в условиях недостатка информации и неполноты исходных данных. Анализ такой информации требует специальных методов, которые составляют один из аспектов эконометрики. Центральной проблемой эконометрики являются построение эконометрической модели и определение возможностей ее использования для описания, анализа и прогнозирования реальных экономических процессов.

Известный эконометрист Цви Гриллихес (1929–1999) писал: «Эконометрика является одновременно нашим телескопом и нашим микроскопом для изучения окружающего экономического мира».

Наиболее распространено понимание содержания эконометрики как науки о связях экономических явлений.

Это понимание эконометрики определило содержание и структуру курса. Большое место в нем отводится регрессионному анализу как методу, используемому в эконометрике для оценки уравнения, которое в наибольшей степени соответствует совокупности наблюдений зависимых и независимых переменных, и тем самым дающему наилучшую оценку истинного соотношения между этими переменными. С помощью оцененного таким образом уравнения можно предсказать, каково будет значение зависимой переменной для данного значения независимой переменной.

Простейшим примером регрессии является парная линейная регрессия всего одной независимой переменной и одной зависимой переменной (скажем, располагаемый доход и потребительские расходы). Задача будет заключаться в подборе прямой линии к совокупности данных, состоящих из пар наблюдений дохода и потребления. Линию, которая лучше всего подходит к данным, нужно выбирать так, чтобы сумма квадратов значений вертикальных отклонений точек от линии была минимальной. Этот метод наименьших квадратов применяется при анализе большинства регрессий. Степень приближения регрессионной линии к наблюдениям измеряется коэффициентом корреляции.

Регрессионное уравнение не дает точного прогноза зависимой переменной для любого заданного значения независимой переменной, так как коэффициенты регрессии подвержены случайным искажениям. Чтобы учесть погрешности оцененного уравнения регрессии, отражающего действительные законо-

мерности поведения всего населения на основе выборочного наблюдения, уравнение регрессии обычно записывается так:

$$y = a + bx + e. \qquad (1.1)$$

Там, где предполагается, что на зависимую переменную существенно влияет более чем одна независимая переменная, используется метод множественной линейной регрессии.

Кроме того, в экономике все большее значение приобретает анализ временных рядов.

Эконометрика – это наука, которая на базе статистических данных дает количественную характеристику взаимозависимым экономическим явлениям и процессам.

Слово «эконометрика» произошло от двух слов: «экономика» и «метрика» (от греч. «метрон» – «правило определения расстояния между двумя точками в пространстве», «метрия» – «измерение»). Эконометрика – это наука об экономических измерениях. Зарождение эконометрики является следствием междисциплинарного подхода к изучению экономики. Эконометрика представляет собой сочетание трех наук:

1) экономической теории;
2) математической и экономической статистики;
3) математики.

На современном этапе науки неотъемлемым фактором развития эконометрики является использование компьютерных технологий и специальных пакетов прикладных программ.

Основным предметом исследования эконометрики являются массовые экономические явления и процессы. В этом смысле предметы эконометрики и статистики очень схожи.

Эконометрика ставит своей целью количественно охарактеризовать те экономические закономерности, которые экономическая теория выявляет и определяет лишь в общем. Анализ экономических процессов и явлений в эконометрике осуществляется с помощью математических моделей, построенных на статистических данных.

Практически все эконометрические методы и приемы изучения экономических закономерностей позаимствованы из математической статистики. Специфика применения методов математической статистики в эконометрике заключается в том, что практически все экономические показатели являются величинами случайными, а не результатами контролируемого эксперимента.

Поэтому существуют определенные усовершенствования и дополнения методов, которые в математической статистике не используются.

Зачастую экономические данные содержат ошибки измерения. В эконометрике разрабатываются специальные методы анализа, позволяющие устранить или снизить влияние этих ошибок на результаты экспериментов.

Таким образом, эконометрика через математические и статистические методы анализирует экономические закономерности, доказанные экономической теорией.

С помощью эконометрики решается очень широкий круг задач. Их можно **классифицировать по трем признакам:**

1) по конечным прикладным целям:

а) прогноз социально-экономических показателей, определяющих состояние и развитие изучаемой системы;

б) моделирование возможных вариантов социально-экономического развития системы для определения тех параметров, которые оказывают наиболее мощное влияние на состояние системы в целом;

2) по уровню иерархии:

а) задачи, решаемые на макроуровне (страна в целом);

б) задачи, решаемые на мезоуровне (уровень отраслей, регионов);

в) задачи, решаемые на микроуровне (уровень фирмы, семьи, предприятия);

3) по области решения проблем изучаемой экономической системы:

а) рынок;

б) производство;

в) инвестиционная, социальная, финансовая политика;

г) ценообразование;

д) распределительные отношения;

е) спрос и потребление;

ж) отдельно выделенный комплекс проблем.

1.2. Основные виды эконометрических моделей

Выделяют три основных класса эконометрических моделей.

I. Модель временных рядов

Модель представляет собой зависимость результативного признака от переменной времени или переменных, относящихся к другим моментам времени.

А. К моделям временных рядов, в которых результативный признак зависит от времени, относятся:

1) модель тренда (модель зависимости результативного признака от трендовой компоненты);

2) модель сезонности (модель зависимости результативного признака от сезонной компоненты);

3) модель тренда и сезонности.

Б. К моделям временных рядов, в которых результативный признак зависит от переменных, датированных другими моментами времени, относятся:

1) модели с распределенным лагом, которые объясняют вариацию результативного признака в зависимости от предыдущих значений факторных переменных;

2) модели авторегрессии, которые объясняют вариацию результативного признака в зависимости от предыдущих значений результативных переменных;

3) модели ожидания, объясняющие вариацию результативного признака в зависимости от будущих значений факторных или результативных переменных.

В. Модели временных рядов делятся на модели, построенные по стационарным и нестационарным временным рядам.

Стационарные временные ряды характеризуются постоянными во времени средней, дисперсией и автокорреляцией, т. е. данный временной ряд не содержит трендового и сезонного компонента.

Если временной ряд не отвечает перечисленным условиям, то он является нестационарным (т. е. содержит трендовую и сезонную компоненты).

II. Регрессионные модели с одним уравнением.

В подобных моделях зависимая или результативная переменная, обозначаемая обычно y, представляется в виде функции факторных или независимых признаков $x_1, \ldots, x_n$:

$$y = f(x, \beta) = f(x_1, \ldots, x_n, \beta_1, \ldots, \beta_k),$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_k$ – параметры регрессионного уравнения.

Регрессионные модели делятся на парные (с одним факторным признаком) и множественные (многофакторные) регрессии.

В зависимости от вида функции $f(x, \beta)$ модели делятся на линейные и нелинейные регрессии.

III. Системы одновременных уравнений.

Данные модели описываются системами взаимозависимых регрессионных уравнений. Системы могут состоять из тождеств и регрессионных уравнений, каждое из которых может включать в себя не только факторные переменные, но и результативные переменные из других уравнений системы.

Для тождеств характерно то, что их вид и значения параметров известны.

Регрессионные уравнения, из которых состоит система, называются поведенческими уравнениями. В поведенческих уравнениях значения параметров являются неизвестными и подлежат оцениванию.

Примером системы одновременных уравнений может служить модель спроса и предложения, включающая три уравнения:

$$\begin{cases} Q_t^s = a_0 + a_1 P_t + a_2 P_{t-1} - \textit{уравнение предложения}; \\ Q_t^d = b_0 + b_1 P_t + b_2 I_t - \textit{уравнение спроса}; \\ Q_t^s = Q_t^d - \textit{тождество равновесия}, \end{cases} \qquad (1.2)$$

где Q^s_t – предложение товара в момент времени t;

Q^d_t – спрос на товар в момент времени t,

P_t – цена товара в момент времени t,

P_{t-1} – цена товара в предшествующий момент времени t;

I_t – доход потребителей в момент времени t.

1.3. Эконометрическое моделирование

Можно выделить несколько этапов эконометрического моделирования.

1. **Постановочный.** На данном этапе определяются конечные цели и задачи исследования и набор участвующих в модели факторных и результативных экономических переменных.

Можно выделить следующие цели эконометрического исследования:

1) анализ изучаемого экономического процесса (явления, объекта);

2) прогноз экономических показателей, характеризующих изучаемый процесс;

3) моделирование поведения процесса при различных значениях независимых (факторных) переменных;

4) выработка управленческих решений.

2. **Теоретический анализ** сущности изучаемого процесса, а также формирование и формализация известной до моделирования информации.

3. **Построение математической модели в общем виде.**

Осуществляется выбор общего вида модели и выявление состава и формы входящих в нее связей, т. е. происходит непосредственно моделирование.

Основная задача этапа моделирования заключается в выборе наиболее оптимального вида функции зависимости результативной переменной от факторных признаков. Если возникает возможность выбора между нелинейной и линейной формой зависимости, то предпочтение всегда отдается линейной форме как наиболее простой и надежной.

Помимо этого, на этапе моделирования решается задача спецификации модели путем:

1) аппроксимации математической формой выявленных связей и соотношений между переменными;

2) определения зависимых и независимых переменных;

3) формулировки исходных предпосылок и ограничений модели.

Успех эконометрического моделирования во многом зависит от правильного решения проблемы спецификации модели.

4. **Информационный.** Происходит сбор необходимой статистической базы данных, т. е. эмпирических (наблюдаемых) значений экономических переменных, анализ качества собранной информации.

5. **Идентификация модели.** На данном этапе осуществляются статистический анализ модели и оценка ее параметров.

6. **Оценка качества модели.** Проверяются достоверность и адекватность модели, т. е. определяется, насколько успешно решены задачи спецификации и идентификации модели, какова точность расчетов, полученных на ее основе. Построенная модель должна быть адекватна реальному экономическому процессу. Если качество модели оказалось неудовлетворительным, то вновь возвращаются ко второму этапу моделирования.

7. **Интерпретация результатов моделирования.**

1.4. Классификация видов эконометрических переменных и типов данных

В эконометрических исследованиях, как правило, используются **два типа выборочных данных:**

1) пространственные данные (cross-sectional data);

2) временные данные (time-series data).

Под пространственными данными понимается совокупность экономической информации, относящейся к разным объектам, полученной за один и тот же период или момент времени. Пространственные данные представляют собой выборочную совокупность из некоторой генеральной совокупности. В качестве примера пространственных данных можно привести совокупность различной информации по какому-либо предприятию (численность работников, объем производства, размер основных фондов), об объемах потребления продукции определенного вида и т. д.

Под временными данными понимается совокупность экономической информации, характеризующей один и тот же объект, но за разные периоды времени. По аналогии с пространственной выборкой отдельно взятый временной ряд можно считать выборкой из бесконечного ряда значений показателей во времени.

В качестве примера временных данных можно привести данные о динамике индекса потребительских цен, ежедневные обменные курсы валют. Временная информация естественным образом упорядочена во времени в отличие от пространственных данных.

Экономические переменные, участвующие в любой эконометрической модели, делятся на четыре вида:

1) экзогенные (независимые) – переменные, значения которых задаются извне. В определенной степени данные переменные являются управляемыми (x);

2) эндогенные (зависимые) – переменные, значения которых определяются внутри модели, или взаимозависимые *(y);*

3) лаговые – экзогенные или эндогенные переменные в эконометрической модели, относящиеся к предыдущим моментам времени и находящиеся в уравнении с переменными, относящимися к текущему моменту времени. Например, x_{t-1} – лаговая экзогенная переменная, y_{t-1} – лаговая эндогенная переменная;

4) предопределенные (объясняющие переменные) – лаговые (x_{t-1}) и текущие (x_t) экзогенные переменные, а также лаговые эндогенные переменные (y_{t-1}).

Любая эконометрическая модель предназначена для объяснения значений одной или нескольких текущих эндогенных переменных в зависимости от значений предопределенных переменных.

1.5. Измерительные шкалы

Эконометрика буквально означает «измерение экономики». В основе любого эконометрического исследования лежат измерения тех или иных показателей. Но каждое измерение производится в определённой шкале, и необходимо чётко понимать, с какой шкалой вы имеете дело в каждом конкретном случае и какие операции вы можете производить над данными.

Измерение – это алгоритмическая операция, которая данному наблюдаемому состоянию объекта, процесса, явления ставит в соответствие определенное обозначение: число, номер или символ.

Измерительные шкалы можно упорядочить по их «силе» (рис. 1.1).

«Сильные» шкалы

Абсолютная шкала

Шкала отношений

Интервальная шкала (порядковая)

Ранговая шкала (порядковая)

Номинальная шкала (шкала наименований)

«Слабые» шкалы

Рис. 1.1. Упорядочение измерительных шкал по их «силе»

Шкалы наименований

Предположим, что число различимых состояний (математический термин – число классов эквивалентности) конечно. Каждому классу эквивалентности поставим в соответствие обозначение, отличное от обозначений других классов. Теперь измерение будет состоять в том, чтобы, проведя эксперимент над объектом, определить принадлежность результата к тому или иному классу эквивалентности и записать это с помощью символа, обозначающего данный класс. Такое измерение называется измерением в *шкале наименований*.

Особенности шкалы наименований рассмотрим на примерах. Естественнее всего использовать шкалу наименований в тех случаях, когда классифицируются дискретные по своей природе явления (например, различные объекты). Для обозначения классов могут быть использованы как слова естественного языка (например, географические названия, собственные имена людей и т.д.), произвольные символы (гербы и флаги государств, эмблемы родов войск, всевозможные значки и т.д. номера (регистрационные номера автомобилей, официальных документов, номера на майках спортсменов), так и их различные комбинации (например, почтовые адреса, экслибрис личных библиотек, печати и пр.).

С номерами нельзя обращаться как с числами, за исключением определения их равенства или неравенства.

Поэтому при обработке экспериментальных данных, зафиксированных в номинальной шкале, непосредственно с самими данными можно выполнять только операцию проверки их совпадения или несовпадения.

Порядковые или ранговые шкалы

В тех случаях, когда наблюдаемый (измеряемый) признак состояния имеет природу, не только позволяющую отождествить состояния с одним из классов эквивалентности, но и дающую возможность в каком-то отношении сравнивать разные классы, для измерений можно выбрать более сильную шкалу, чем номинальная. Следующей по силе за номинальной шкалой является *порядковая шкала* (используется также название *ранговая шкала).* Примерами применения такой шкалы являются нумерация очередности, воинские звания, призовые места конкурсе.

Отношение порядка ничего не говорит о дистанции между сравниваемыми классами. Поэтому порядковые экспериментальные данные, даже если они изображены цифрами, нельзя рассматривать как числа, над ним нельзя выполнять действия, которые приводят к получению разных результатов при преобразовании шкалы, не нарушающем порядка. Например, нельзя вычислять выборочное среднее порядковых измерений.

Допустимые для этих шкал операции – вычисление рангов относительных частот.

Шкалы интервалов

Если упорядочивание объектов можно выполнить настолько точно, что известны расстояния между любыми двумя из них, то измерение окажется заметно сильнее, чем в шкале порядка. Естественно выражать все расстояния в единицах, хотя и произвольных, но одинаковых по всей длине шкалы. Введенные шкалы могут иметь **произвольные начала отсчета и единицы длины,** а связь между показаниями в таких шкалах является линейной.

Примерами величин, которые по физической природе либо не имеют абсолютного нуля, либо допускают свободу выбора в установлении начала отсчета и поэтому измеряются в интервальных шкалах, являются температура, время, высота местности (начало летосчисления)

Название «шкала интервалов» подчеркивает, что в *этой шкале только интервалы имеют смысл настоящих чисел* и только над интервалами следует выполнять арифметические операции.

Шкалы отношений

Измерения в такой шкале являются «полноправными» числами, с ними можно выполнять любые арифметические действия. Эти шкалы имеют естественный, абсолютный нуль, хотя остается свобода в выборе единиц.

Примерами величин, природа которых соответствует шкала отношений, являются длина, вес, электрическое сопротивление, деньги.

Абсолютная шкала

Эта шкала имеет и абсолютный нуль, абсолютную единицу. Эта шкала просто единственна, уникальна. Именно такими качествами обладает **числовая ось,** которую естественно назвать *абсолютной шкалой.* Важной особенностью абсолютной шкалы по сравнению со всеми остальными является отвлеченность (безразмерность) и абсолютность ее единицы. Числовая ось используется как измерительная шкала в явной форме при счете предметов, а как вспомогательное средство присутствует во всех остальных шкалах.

Можно сказать, что чем сильнее шкала, в которой производятся измерения, тем больше сведений об изучаемом объекте, явлении, процессе дают измерения. Поэтому так естественно стремление каждого исследователя провести измерения в возможно более сильной шкале. Однако важно иметь в виду, что выбор шкалы измерения должен ориентироваться на объективные отношения, которым подчинена наблюдаемая величина.

2. Построение регрессионных моделей

2.1. Парная регрессия

Парная регрессия – уравнение связи двух переменных y и x:

$$y = f(x) \tag{2.1}$$

где y – зависимая переменная (результативный признак);

x – независимая, объясняющая переменная (признак-фактор).

Различают линейные и нелинейные регрессии.

Линейная регрессия: $y = a + bx + \varepsilon$.

Нелинейные регрессии делятся на два класса: регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Регрессии, нелинейные по объясняющим переменным:

– полиномы разных степеней $y = a + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \varepsilon$;

– равносторонняя гипербола $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$.

Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам:

– степенная $y = ax^b$;

– показательная $y = ab^x$

– экспоненциальная $y = e^{a+bx}$

Построение уравнения регрессии сводится к оценке ее параметров. Для оценки параметров регрессий, линейных по параметрам, используют метод наименьших квадратов (МНК). МНК позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y от теоретических $\hat{y}_x$ минимальна, т.е.

$$\Sigma(y - \hat{y})^2 \to min \tag{2.2}$$

Для линейных и нелинейных уравнений, приводимых к линейным, решается следующая система относительно a и b:

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum y, \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum yx. \end{cases} \tag{2.3}$$

Можно воспользоваться готовыми формулами, которые вытекают из этой системы:

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x},\ b = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{2.4}$$

Тесноту связи изучаемых явлений оценивает линейный коэффициент парной корреляции r_{xy} для линейной регрессии ($-1 \le r_{xy} \le 1$):

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{2.5}$$

и индекс корреляции p_{xy} – для нелинейной регрессии ($0 \le p_{xy} \le 1$):

$$p_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}} = \sqrt{1 - \frac{\sum(y - \hat{y}_x)^2}{\sum(y - \bar{y})^2}}. \quad (2.6)$$

Оценку качества построенной модели даст коэффициент (индекс) детерминации, а также средняя ошибка аппроксимации.

Средняя ошибка аппроксимации – среднее отклонение расчетных значений от фактических:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y - \hat{y}}{y}\right| \cdot 100\%. \quad (2.7)$$

Допустимый предел значений $\bar{A}$ – не более 8–10 %.

Средний коэффициент эластичности $\bar{Э}$ показывает на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат y от своей средней величины при изменении фактора x на 1 % от своего среднего значения:

$$\bar{Y} = f`(x)\frac{\bar{x}}{\bar{y}}. \quad (2.8)$$

Задача дисперсионного анализа состоит в анализе дисперсии зависимой переменной:

$$\sum(y - \bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2 + \sum(y - \hat{y}_x)^2, \quad (2.9)$$

где $\sum(y - \bar{y})^2$ – общая сумма квадратов отклонений;

$\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2$ – сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией («объясненная» или «факторная»);

$\sum(y - \hat{y}_x)^2$ – остаточная сумма квадратов отклонений.

Долю дисперсии, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака у характеризует коэффициент (индекс) детерминации R^2:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2} \quad (2.10)$$

Коэффициент детерминации – квадрат коэффициента или индекса корреляции.

F-тест – оценивание качества уравнения регрессии – состоит в проверке гипотезы H_o о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи. Для этого выполняется сравнение фактического $F_{факт}$ и критического (табличного) $F_{табл}$ значений F-критерия Фишера. $F_{факт}$ определяется из соотношения значений факторной и остаточной дисперсий, рассчитанных на одну степень свободы:

$$F_{табл} = \frac{\sum(\hat{y} - \bar{y})^2 / m}{\sum(y - \hat{y})^2 / (n - m - 1)} = \frac{r^2_{xy}}{1 - r^2_{xy}}(n - 2), \quad (2.11)$$

где n – число единиц совокупности;

m – число параметров при переменных x.

Fтабл – это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости *a*. Уровень значимости *a* – вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно *a* принимается равной 0,05 или 0,01.

Если $F_{табл} < F_{факт}$, то H_o – гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность. Если $F_{табл} > F_{факт}$, то гипотеза H_o не отклоняется и признается статистическая незначимость, ненадежность уравнения регрессии.

Для оценки статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции рассчитываются t-критерий Стъюдента и доверительные интервалы каждого из показателей. Выдвигается гипотеза H_o о случайной природе показателей, т.е. о незначимом их отличии от нуля. Оценка значимости коэффициентов регрессии и корреляции с помощью t-критерия Стьюдента проводится путем сопоставления их значений с величиной случайной ошибки:

$$t_b = \frac{b}{m_b};\ t_a = \frac{a}{m_a};\ t_r = \frac{r}{m_r}. \qquad (2.12)$$

Случайные ошибки параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции определяются по формулам:

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2/(n-2)}{\sum(x-\bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{S^2_{ост}}{\sum(x-\bar{x})^2}} = \frac{S_{ост}}{\sigma_x\sqrt{n}};$$

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2}{(n-2)}\cdot\frac{\sum x^2}{n\sum(x-\bar{x})^2}} = \sqrt{S^2_{ост}\frac{\sum x^2}{n^2\sigma_x^2}} = S_{ост}\frac{\sqrt{\sum x^2}}{n\sigma_x}$$

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1-r^2_{xy}}{n-2}}. \qquad (2.13)$$

Сравнивая фактическое и критическое (табличное) значения t-статистики – $t_{табл}$ и $t_{факт}$ – принимаем или отвергаем гипотезу H_o.

Связь между F-критерием Фишера и t-статистикой Стьюдента выражается равенством

$$t_r^2 = t_b^2 = \sqrt{F}. \qquad (2.14)$$

Если $t_{табл} < t_{факт}$, то H_o отклоняется, т.е. *a, b* и r_{xy} не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием систематически действующего фактора *x*. Если $t_{табл} > t_{факт}$, то гипотеза H_o не отклоняется и признается случайная природа формирования *a, b* или r_{xy}.

Для расчета доверительного интервала определяем предельную ошибку Δ для каждого показателя:

$$\Delta_a = t_{табл} m_a, \qquad \Delta_b = t_{табл} m_b. \qquad (2.15)$$

Формулы для расчета доверительных интервалов имеют следующий вид:

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a;\quad \gamma_{a_{\min}} = a - \Delta_a;\quad \gamma_{a_{\max}} = a + \Delta_a;$$
$$\gamma_b = b \pm \Delta_b;\quad \gamma_{b_{\min}} = b - \Delta_b;\quad \gamma_{b_{\max}} = b + \Delta_b. \qquad (2.16)$$

Если в границы доверительного интервала попадает ноль, т.е. нижняя граница отрицательна, а верхняя положительна, то оцениваемый параметр принимается нулевым, так как он не может одновременно принимать и положительное, и отрицательное значения.

Прогнозное значение y_p определяется путем подстановки в уравнение регрессии $y = a + bx$ соответствующего (прогнозного) значения x_p. Вычисляется средняя стандартная ошибка прогноза:

$$m_{\hat{y}_p} = \sigma_{\text{ост}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \overline{x})^2}{\sum (x - \overline{x})^2}},$$

где $\sigma_{\text{ост}} = \sqrt{\frac{\Sigma(y - \hat{y})^2}{n - m - 1}}$; (2.17)

и строится доверительный интервал прогноза:

$$\gamma_{\hat{y}_p} = \hat{y}_p \pm \Delta_{\hat{y}_p}; \quad \gamma_{\hat{y}_{p\,\min}} = \hat{y}_p - \Delta_{\hat{y}_p}; \quad \gamma_{\hat{y}_{p\,\max}} = \hat{y}_p + \Delta_{\hat{y}_p},$$

где $\Delta_{\hat{y}_p} = t_{\text{табл}} \cdot m_{\hat{y}_p}$. (2.18)

2.2. Решение типовых задач

Пример

По семи территориям Уральского района за 199X г. известны значения двух признаков (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Исходные данные

Район	Расходы на покупку продовольственных товаров в общих расходах, %, y	Среднедневная заработная плата одного работающего, р., x
Удмуртская респ.	68,8	45,1
Свердловская обл.	61,2	59,0
Башкортостан	59,9	57,2
Челябинская обл.	56,7	61,8
Пермская обл.	55,0	58,8
Курганская обл.	54,3	47,2
Оренбургская обл.	49,3	55,2

Требуется:

1. Для характеристики зависимости y от x рассчитать параметры следующих функций:

а) линейной;

б) степенной;

в) показательной;

г) равносторонней гиперболы.

2. Оценить каждую модель через среднюю ошибку аппроксимации $\bar{A}$ и F-критерий Фишера.

Решение

1а. Для расчета параметров *a* и *b* линейной регрессии $y = a + bx$ решаем систему нормальных уравнений относительно *a* и *b*:

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum y, \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum yx. \end{cases}$$

По исходным данным рассчитываем Σy, Σx, Σyx, Σx^2, Σy^2 (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Расчетная таблица

	y	x	yx	x^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	A_i
1	68,8	45,1	3102,88	2034,01	4733,44	61,3	7,5	10,9
2	61,2	59,0	3610,80	3481,00	3745,44	56,5	4,7	7,7
3	59,9	57,2	3426,28	.3271,84	3588,01	57,1	2,8	4,7
4	56,7	61,8	3504,06	3819,24	3214,89	55,5	1,2	2,1
5	55,0	58,8	3234,00	3457,44	3025,00	56,5	–1,5	2,7
6	54,3	47,2	2562,96	2227,84	2948,49	60,5	–6,2	11,4
7	49,3	55,2	2721,36	3047,04	2430,49	57,8	–8,5	17,2
Итого	405,2	384,3	22162,34	21338,41	23685,76	405,2	0,0	56,7
Среднее значение	57,89	54,90	3166,05	3048,34	3383,68	x	x	8,1
σ	5,74	5,86	x	x	x	x	x	x
σ^2	32,92	34,34	x	x	x	x	x	x

$$b = \frac{\overline{yx} - \bar{y}\cdot\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{3166,05 - 57,89\cdot 54,9}{5,86^2} \approx -0,35,$$

$$a = \bar{y} - b\cdot\bar{x} = 57,89 + 0,35\cdot 54,9 \approx 76,88.$$

Уравнение регрессии: y = 76,88 – 0,35x. С увеличением среднедневной заработной платы на 1 р. доля расходов на покупку продовольственных товаров снижается в среднем на 0,35 %-ных пункта.

Рассчитаем линейный коэффициент парной корреляции:

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0,35\cdot\frac{5,86}{5,74} = -0,357.$$

Связь умеренная, обратная.

Определим коэффициент детерминации:

$$r_{xy}^2 = (-0,35)^2 = 0,127.$$

Вариация результата на 12,7 % объясняется вариацией фактора *x*. Подставляя в уравнение регрессии фактические значения *x*, определим теоретиче-

ские (расчетные) значения $\hat{y}_x$. Найдем величину средней ошибки аппроксимации $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y-\hat{y}}{y}\right|\cdot 100\% = \frac{1}{n}\sum A_i = \frac{56,7\cdot 100\%}{7} = 8,1\%.$$

В среднем расчетные значения отклоняются от фактических на 8,1 %.

Рассчитаем F-критерий:

$$F_{табл} = \frac{0,127}{0,973}\cdot 5 = 0,7,$$

поскольку $1 \le F \le F_{табл}$, следует рассмотреть F^{-1}.

Полученное значение указывает на необходимость принять гипотезу H_0 о случайной природе выявленной зависимости и статистической незначимости параметров уравнения и показателя тесноты связи.

1б. Построению степенной модели $y = ax^b$ предшествует процедура линеаризации переменных. В примере линеаризация производится путем логарифмирования обеих частей уравнения:

$$lgy = lga + b\cdot lgx;$$

$$Y = C + b\cdot X,$$

$$где\ Y = lgy, \qquad X = lgx, \qquad C = lga.$$

Для расчетов используем данные табл. 2.3.

Таблица 2.3

Расчетная таблица

	Y	X	YX	Y^2	X^2	$\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$	$(y-\hat{y}_x)^2$	A_i
1	1,8376	1,6542	3,0398	3,3768	2,7364	61,0	7,8	60,8	11,3
2	1,7868	1,7709	3,1642	3,1927	3,1361	56,3	4,9	24,0	8,0
3	1,7774	1,7574	3,1236	3,1592	3,0885	56,8	3,1	9,6	5,2
4	1,7536	1,7910	3,1407	3,0751	3,2077	55,5	1,2	1,4	2,1
5	1,7404	1,7694	3,0795	3,0290	3,1308	56,3	–1,3	1,7	2,4
6	1,7348	1,6739	2,9039	3,0095	2,8019	60,2	–5,9	34,8	10,9
7	1,6928	1,7419	2,9487	2,8656	3,0342	57,4	–8,1	65,6	16,4
Итого	12,3234	12,1587	21,4003	21,7078	21,1355	403,5	1,7	197,9	56,3
Сред. значение	1,7605	1,7370	3,0572	3,1011	3,0194	X	X	28,27	8,0
σ	0,0425	0,0484	X	X	X	X	X	X	X
σ^2	0,0018	0,0023	X	X	X	X	X	X	X

Рассчитаем C и b:

$$b = \frac{\overline{Y\cdot X} - \bar{Y}\cdot\bar{X}}{\sigma_X^2} = \frac{3,0572 - 1,7605\cdot 1,7370}{0,0484^2} \approx -0,298;$$

$$C = \bar{Y} - b\cdot\bar{X} = 1,7605 + 0,298\cdot 1,7370 = 2,278.$$

Получим линейное уравнение: $\hat{Y} = 2{,}278 - 0{,}298X$. Выполнив его потенцирование, получим:

$$\hat{y} = 10^{2{,}278} \cdot x^{-0{,}298} = 189{,}7 \cdot x^{-0{,}298}$$

Подставляя в данное уравнение фактические значения x, получаем теоретические значения результата $\hat{y}_x$. По ним рассчитаем показатели: тесноты связи – индекс корреляции p_{xy} и среднюю ошибку аппроксимации $\bar{A}_i$.

$$p_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{28{,}27}{32{,}92}} = 0{,}3758, \qquad \bar{A} = 8{,}0\%.$$

Характеристики степенной модели указывают, что она несколько лучше линейной функции описывает взаимосвязь.

1в. Построению уравнения показательной кривой $y = ab^x$ предшествует процедура линеаризации переменных при логарифмировании обеих частей уравнения:

$$lgy = lga + x \cdot lgb;$$

$$Y = C + B \cdot x,$$

$$где\ Y = lgy, \qquad C = lga, \qquad B = lgb.$$

Для расчетов используем данные табл. 2.4.

Таблица 2.4

Расчетная таблица

	Y	X	Y_x	Y^2	X^2	$\hat{y}_x$	$y - \hat{y}_x$	$(y - \hat{y}_x)^2$	A_i
1	1,8376	45,1	82,8758	3,3768	2034,01	60,7	8,1	65,61	11,8
2	1,7868	59,0	105,4212.	3,1927	3481,00	56,4	4,8	23,04	7,8
3	1,7774	57,2	101,6673	3,1592	3271,84	56,9	3,0	9,00	5,0
4	1,7536	61,8	108,3725	3,0751	3819,24	55,5	1,2	1,44	2,1
5	1,7404	58,8	102,3355	3,0290	3457,44	56,4	–1,4	1,96	2,5
6	1,7348	47,2	81,8826	3,0095	2227,84	60,0	–5,7	32,49	10,5
7	1,6928	55,2	93,4426	2,8656	3047,04	57,5	–8,2	67,24	16,6
Итого	12,3234	384,3	675,9974	21,7078	21338,41	403,4	–1,8	200,78	56,3
Среднее значение	1,7605	54,9	96,5711	3,1011	3048,34	x	x	28,68	8,0
σ	0,0425	5,86	x	x	x	x	x	x	x
σ^2	0,0018	34,3396	x	x	x	x	x	x	x

Значения параметров регрессии A и B составили:

$$B = \frac{\overline{Y \cdot x} - \bar{Y} \cdot \bar{x}}{\sigma_X^2} = \frac{96{,}57111 - 1{,}7605 \cdot 54{,}9}{5{,}86^2} \approx -0{,}0023;$$

$$A = \bar{Y} - B \cdot \bar{x} = 1{,}7605 + 0{,}0023 \cdot 54{,}9 = 1{,}887.$$

Получено линейное уравнение: Ŷ = 1,887 – 0,0023x. Произведем потенцирование полученного уравнения и запишем его в обычной форме:

$$\hat{y} = 10^{1,887} \cdot 10^{-0,0023x} = 77,1 \cdot 0,9947^{x}.$$

Тесноту связи оценим через индекс корреляции p_{xy} :

$$p_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{28,68}{32,92}} = 0,3589.$$

Связь умеренная.

$\bar{A}$ = 8,0 %, что говорит о повышенной ошибке аппроксимации, но в допустимых пределах. Показательная функция чуть хуже, чем степенная, она описывает изучаемую зависимость.

1г. Уравнение равносторонней гиперболы $y = a + b \cdot \frac{1}{x}$ линеаризуется при замене:

$$z = \frac{1}{x}. \text{ Тогда } y = a + b \bullet z .$$

Для расчетов используем данные табл. 2.5.

Таблица 2.5

Расчетная таблица

	y	z	yz	z^2	y^2	$\hat{y}_x$	$y - \hat{y}_x$	$(y - \hat{y}_x)^2$	A_i
1	68,8	0,0222	1,5255	0,000492	4733,44	61,8	7,0	49,00	10,2
2	61,2	0,0169	1,0373	0,000287	3745,44	56,3	4,9	24,01	8,0
3	59,9	0,0175	1,0472	0,000306	3588,01	56,9	3,0	9,00	5,0
4	56,7	0,0162	0,9175	0,000262	3214,89	55,5	1,2	1,44	2,1
5	55	0,0170	0,9354	0,000289	3025	56,4	-1,4	1,96	2,5
6	54,3	0,0212	1,1504	0,000449	2948,49	60,8	-6,5	42,25	11,9
7	49,3	0,0181	0,8931	0,000328	2430,49	57,5	-8,2	67,24	16,7
Итого	405,2	0,1291	7,5064	0,0024	23685,8	405,2	0,0	194,90	56,4
Сред-нее значе-	57,89	0,0184	1,0723	0,0003	3383,68	x	x	27,84	8,1
σ	5,74	0,002145	x	x	x	x	x		x
σ^2	32,92	0,000005	x	x	x	x	x		x

Значения параметров регрессии *a* и *b* составили:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{z} = 57,89 - 1051,4 \cdot 0,0184 = 38,5;$$

$$b = \frac{\overline{y \cdot z} - \bar{y} \cdot \bar{z}}{\sigma_z^2} = \frac{1,0723 - 57,9 \cdot 0,0184}{0,002145^2} = 1051,4.$$

Получено уравнение: $\hat{y} = 38{,}5 + 1051{,}4 \cdot \frac{1}{x}$.

Индекс корреляции: $p_{xy} = \sqrt{1 - \frac{27{,}84}{32{,}92}} = 0{,}3944$.

Ā =8,1 %. По уравнению равносторонней гиперболы получена наибольшая оценка тесноты связи: p_{xy} = 0,3944 (по сравнению с линейной, степенной и показательной регрессиями). Ā остается на допустимом уровне:

$$F_{\text{факт}} = \frac{\rho_{yx}^2}{1-\rho_{yx}^2} \cdot \frac{n-m-1}{m} = \frac{0{,}1555}{0{,}8445} \cdot 5 = 0{,}92,$$

где $F_{\text{табл}} = 6{,}6 > F_{\text{факт}}$, $\alpha = 0{,}05$.

Следовательно, принимается гипотеза H_0 о статистически незначимых параметрах этого уравнения. Этот результат можно объяснить сравнительно невысокой теснотой выявленной зависимости и небольшим числом наблюдений.

2.3. Реализация типовых задач на компьютере

Решение с помощью ППП Excel

1. Встроенная статистическая функция **ЛИНЕЙН** определяет параметры линейной регрессии $y=a + bx$. Порядок вычисления следующий:

1) введите исходные данные или откройте существующий файл, содержащий анализируемые данные;

2) выделите область пустых ячеек 5x2 (5 строк, 2 столбца) для вывода результатов регрессионной статистики или область 1x2 – для получения только оценок коэффициентов регрессии;

3) активизируйте Мастер функций любым из способов:

а) в главном меню выберите *Вставка/Функция*;

б) на панели инструментов Стандартная щелкните по кнопке *Вставка функции*;

4) в окне Категория (рис. 2.1) выберите Статистические, в окне функция – ЛИНЕЙН. Щелкните по кнопке ОК;

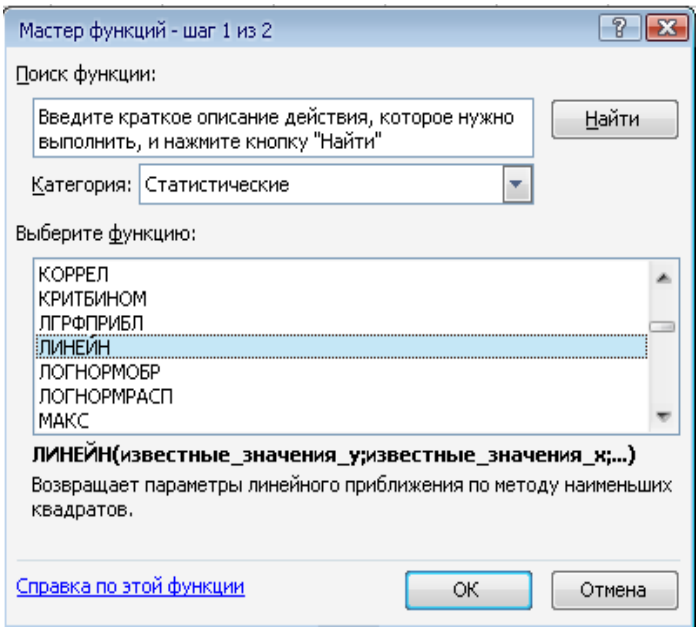


Рис. 2.1. Диалоговое окно «Мастер функций»

5) заполните аргументы функции (рис. 2.2):

Известные значения y – диапазон, содержащий данные результативного признака;

Известные значения x – диапазон, содержащий данные факторов независимого признака;

Константа – логическое значение, которое указывает на наличие или на отсутствие свободного члена в уравнении; если Константа = 1, то свободный член рассчитывается обычным образом, если Константа = 0, то свободный член равен 0;

Статистика – логическое значение, которое указывает, выводить дополнительную информацию по регрессионному анализу или нет. Если Статистика = 1, то дополнительная информация выводится, если Статистика = 0, то выводятся только оценки параметров уравнения. Щелкните по кнопке ОК;

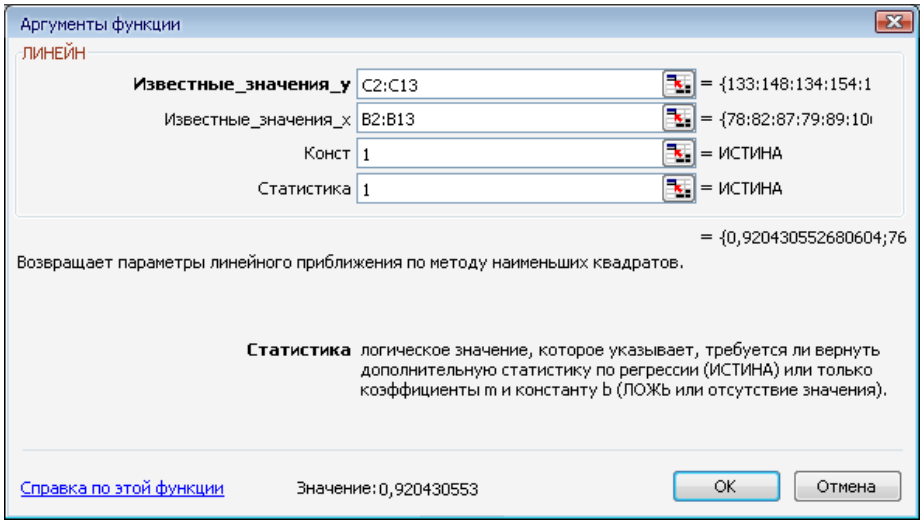


Рис. 2.2. Диалоговое окно ввода аргументов функции ЛИНЕЙН

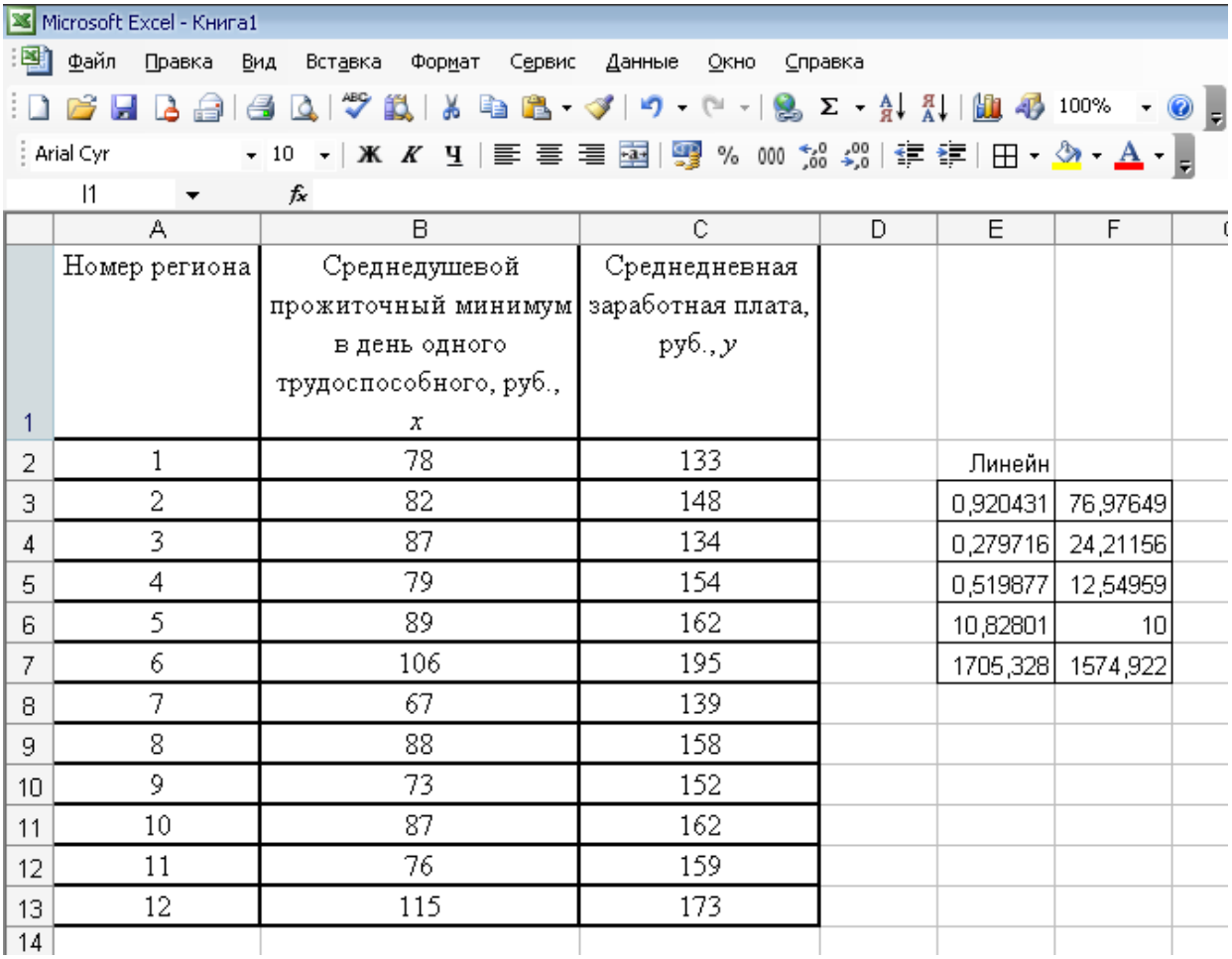
6) в левой верхней ячейке выделенной области появится первый элемент итоговой таблицы. Чтобы раскрыть всю таблицу, нажмите на клавишу <F2>, а затем – на комбинацию клавиш <CTRL>+<SHIFT>+<ENTER>.

Дополнительная регрессионная статистика будет выводиться в порядке, указанном в следующей схеме:

Значение коэффициента *b*	Значение коэффициента *a*
Среднеквадратическое отклонение *b*	Среднеквадратическое отклонение *a*
Коэффициент детерминации R^2	Среднеквадратическое отклонение *y*
F-статистика	Число степеней свободы
Регрессионная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов

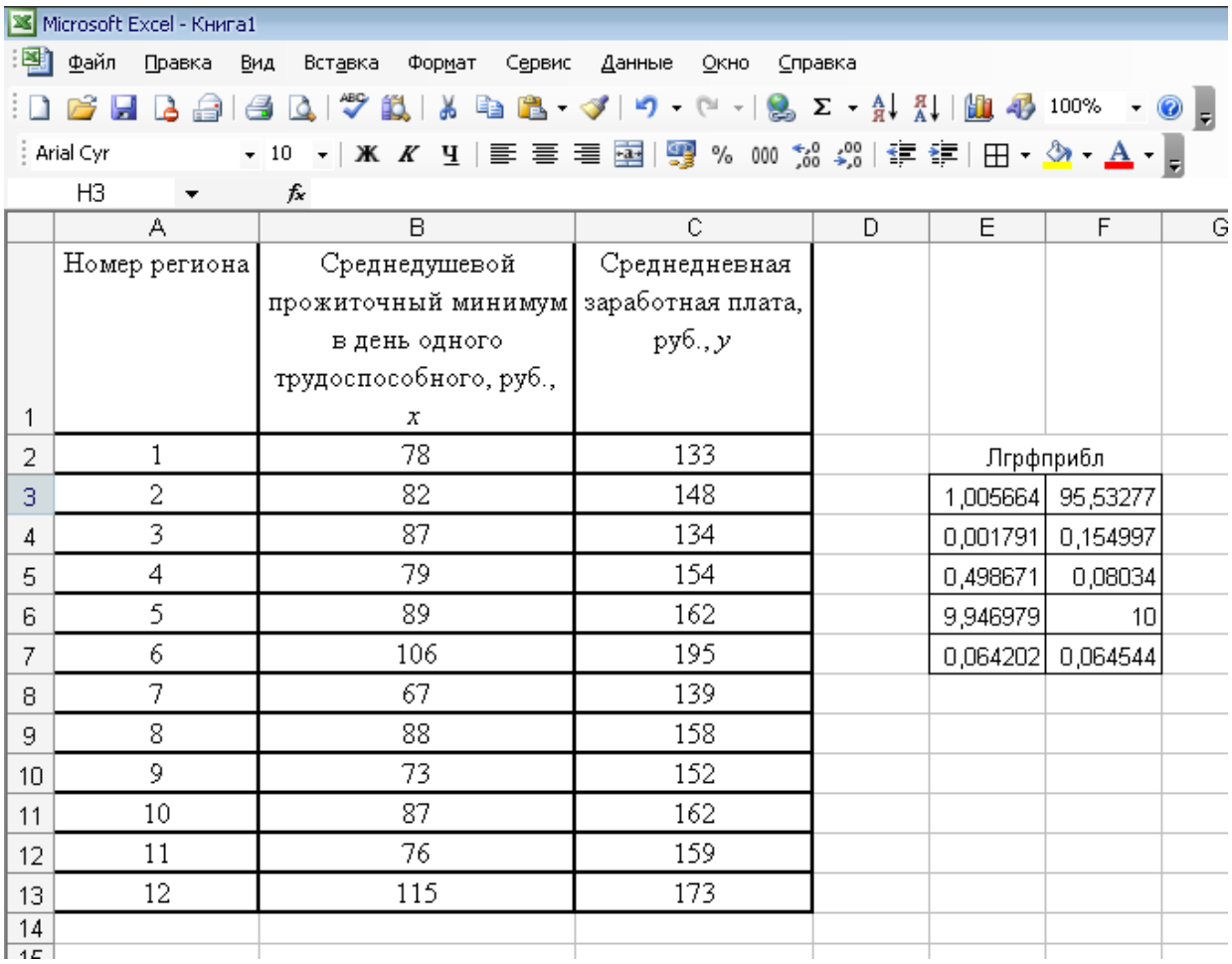
Для вычисления параметров экспоненциальной кривой $y = \alpha \cdot \beta^x$ в MS Excel применяется встроенная статистическая функция ЛГРФПРИБЛ. Порядок вычисления аналогичен применению функции ЛИНЕЙН.

Для данных из примера 2 результат вычисления функции ЛИНЕЙН представлен на рис. 2.3, функции ЛГРФПРИБЛ – на рис. 2.4.



	A	B	C	D	E	F
1	Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., *x*	Среднедневная заработная плата, руб., *y*			
2	1	78	133		Линейн	
3	2	82	148		0,920431	76,97649
4	3	87	134		0,279716	24,21156
5	4	79	154		0,519877	12,54959
6	5	89	162		10,82801	10
7	6	106	195		1705,328	1574,922
8	7	67	139			
9	8	88	158			
10	9	73	152			
11	10	87	162			
12	11	76	159			
13	12	115	173			
14						

Рис. 2.3. Результат вычисления функции ЛИНЕЙН



	A	B	C	D	E	F	G
1	Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум в день одного трудоспособного, руб., *x*	Среднедневная заработная плата, руб., *y*				
2	1	78	133		Лгрфприбл		
3	2	82	148		1,005664	95,53277	
4	3	87	134		0,001791	0,154997	
5	4	79	154		0,498671	0,08034	
6	5	89	162		9,946979	10	
7	6	106	195		0,064202	0,064544	
8	7	67	139				
9	8	88	158				
10	9	73	152				
11	10	87	162				
12	11	76	159				
13	12	115	173				
14							

Рис. 2.4. Результат вычисления функции ЛГРФПРИБЛ

2. С помощью инструмента анализа данных Регрессия, помимо результатов регрессионной статистики, дисперсионного анализа и доверительных интервалов, можно получить остатки и графики подбора линии регрессии, остатков и нормальной вероятности. Порядок действий следующий:

1) проверьте доступ к пакету анализа. В главном меню последовательно выберите Сервис /Надстройки. Установите флажок Пакет анализа;

2) в главном меню выберите Сервис/Анализ данных/Регрессия. Щелкните по кнопке ОК;

3) заполните диалоговое окно ввода данных и параметров вывода:

Входной интервал Y – диапазон, содержащий данные результативного признака;

Входной интервал X – диапазон, содержащий данные факторов независимого признака;

Метки – флажок, который указывает, содержит ли первая строка названия столбцов или нет;

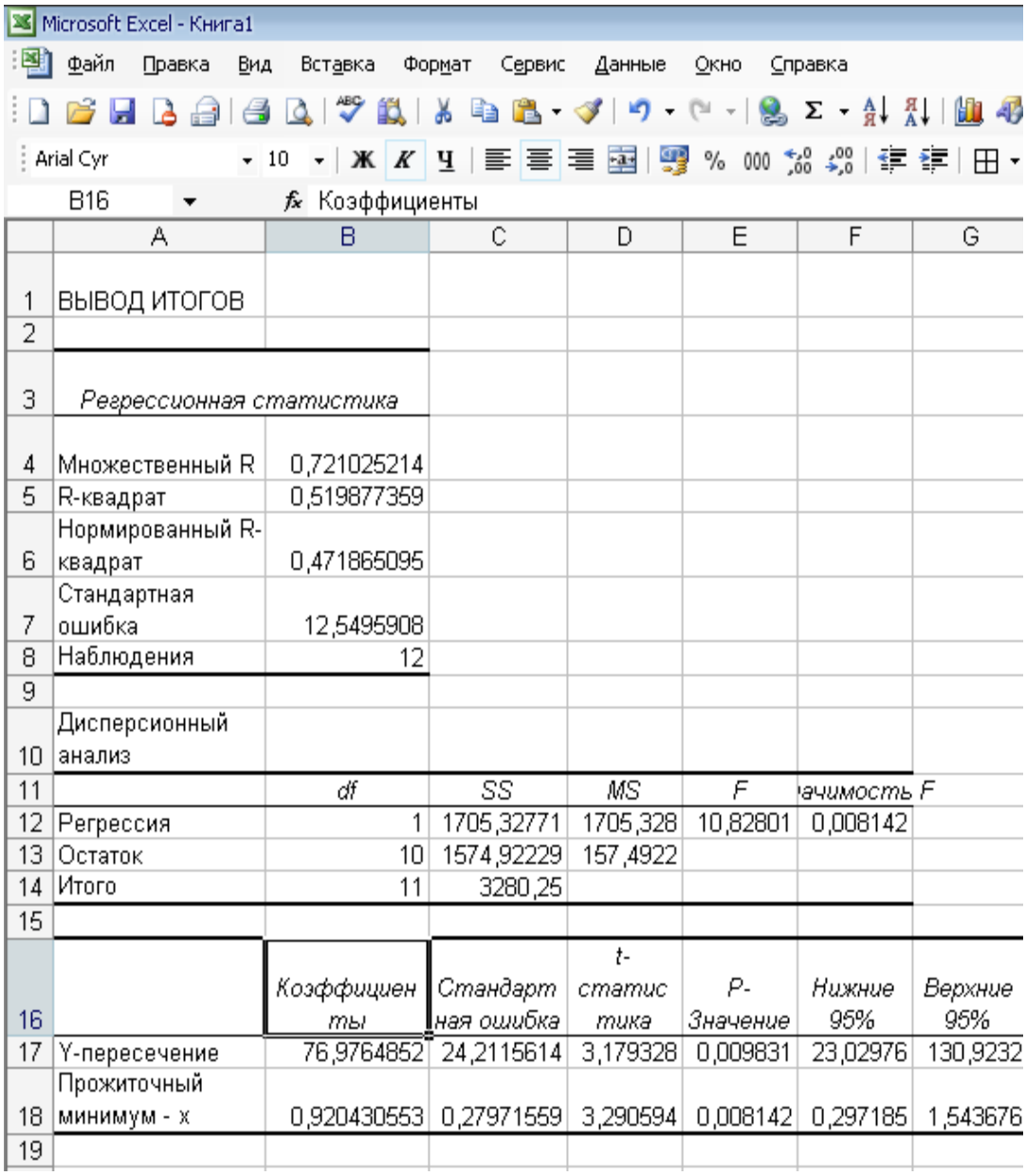
Константа – ноль – флажок, указывающий на наличие или отсутствие свободного члена в уравнении;

Выходной интервал – достаточно указать левую верхнюю ячейку будущего диапазона;

Новый рабочий лист – можно задать произвольное имя нового листа.

Если необходимо получить информацию и графики остатков, установите соответствующие флажки в диалоговом окне. Щелкните по кнопке ОК.

Результаты регрессионного анализа для данных из примера 2 представлены на рис. 2.5.



	A	B	C	D	E	F	G
1	ВЫВОД ИТОГОВ						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,721025214					
5	R-квадрат	0,519877359					
6	Нормированный R-квадрат	0,471865095					
7	Стандартная ошибка	12,5495908					
8	Наблюдения	12					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость F*	
12	Регрессия	1	1705,32771	1705,328	10,82801	0,008142	
13	Остаток	10	1574,92229	157,4922			
14	Итого	11	3280,25				
15							
16		*Коэффициенты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	76,9764852	24,2115614	3,179328	0,009831	23,02976	130,9232
18	Прожиточный минимум - x	0,920430553	0,27971559	3,290594	0,008142	0,297185	1,543676
19							

Рис. 2.5. Результат применения инструмента Регрессия

Как видим, результаты вычислений вручную и с помощью компьютера совпадают.

2.4. Построение множественной регрессионной модели

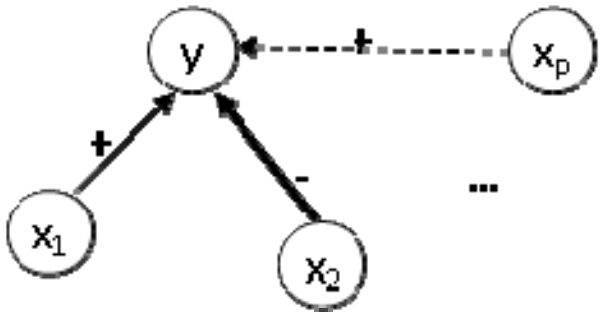
Процесс построения множественной регрессионной модели обычно выполняется в следующей последовательности:

1. Постановка задачи.
2. Сбор исходных данных и их анализ.
3. Отбор факторов для построения модели.
4. Выбор вида регрессионной модели и оценка ее параметров.
5. Проверка адекватности построенной модели.
6. Интерпретация полученных результатов.

1. Постановка задачи

На данном этапе формулируется цель построения модели; определяется показатель (x_0) и набор факторов ($x_j, j = 1,2,\ldots p$); для y и x_j выбирается измеритель; определяется перечень вопросов, на которые должны быть получены ответы в результате моделирования. Для выбранного набора факторов и показателя рекомендуется построить граф связей, с указанием направления влияния и предполагаемую тесноту связи.

Граф связей может иметь следующий вид:



На рисунке стрелками показана сила влияния:

▬▬▬ (жирная) – сильное влияние;

——— (сплошная) – среднее влияние;

- - - - - - - - - - - - (пунктирная) – слабое влияние.

Знаки над стрелками показывают тип влияния: + (плюс) – прямая связь (при увеличении значения фактора значение показателя увеличивается); - (минус) – обратная связь (при увеличении значения фактора значение показателя уменьшается). Граф отражает представление исследователя о возможных связях.

2. Сбор исходных данных и их анализ

На данном этапе определяется источник получения информации, период, за который они собираются. Проводится проверка ряда требований, которым должны удовлетворять исходные данные.

Для построения регрессионной модели требуются данные, удовлетворяющие следующим требованиям:

1) y и x_j, включенные в модель, должны быть количественно измерены;

2) число наблюдений за y и x_j должны быть достаточными. Для проверки этого требования используются эмпирические формулы, устанавливающие со-

отношение между количеством факторов (р) и числом наблюдений (n): *n–p–1>30,* для пространственных моделей, а в тех случаях, когда информация представляет собой динамические ряды – соотношение *n/p >=3;*

3) наблюдения должны быть независимыми. Наблюдения считаются независимыми, если результаты каждого последующего наблюдения не связаны с предыдущими и не содержат никаких сведений о последующих наблюдениях и не влияет на них. Для оценки независимости наблюдений рассчитывается коэффициент автокорреляции. Критерий Дарбина – Уотсона($d_э$) используется для проверки наличия автокорреляции в динамических рядах. Фактическое значение коэффициента вычисляется по формуле

$$d_э = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad (2.19)$$

где x_i и x_{i+1} – соответствующие значения ряда наблюдений;

4) данные должны представлять собой качественно-однородную совокупность. Однородность информации подразумевает отсутствие (или небольшое количество) нетипичных наблюдений. Для проверки однородности используют:

а) «правило трех сигм»: $x_j - 3\sigma_{x_j} \le \{x_j\} \ge x_j + 3\sigma_{x_j}$,

где $\{x_j\}$ – вектор значений (ряд наблюдений);

x_j – среднее значение данного ряда наблюдений;

σ_{x_j} – среднее квадратическое отклонение данного ряда.

Информация считается однородной, если в этот интервал попадает 97 % наблюдений;

б) коэффициент вариации $v_{x_j} = \frac{\sigma_{x_j}}{\bar{x}_j}$, данные считаются однородными, если $v_{x_j} \le 0{,}33$;

в) подчиняется ли исходный ряд нормальному закону распределения.

Если исходная совокупность неоднородна, то на графике появляются волны.

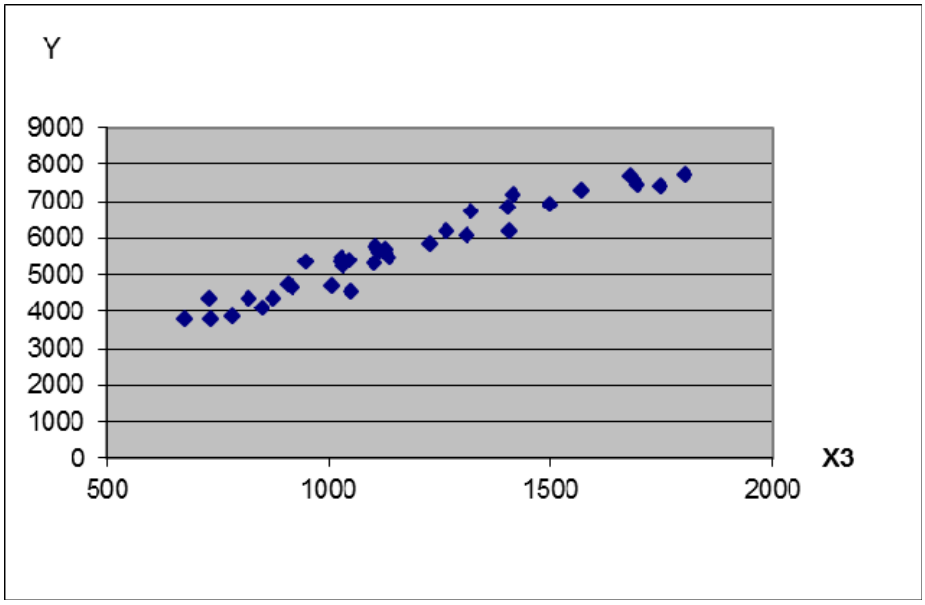
Если обнаружены нетипичные наблюдения, то их следует из дальнейшего анализа исключить и пересчитать статистические характеристики ($\bar{x}_j, \sigma_{x_j}, v_{x_j}$) по оставшейся совокупности наблюдений;

5) факторы, включенные в модель, должны быть независимыми друг о друга. Обычно это явление проверяется при анализе явления коллинеарности.

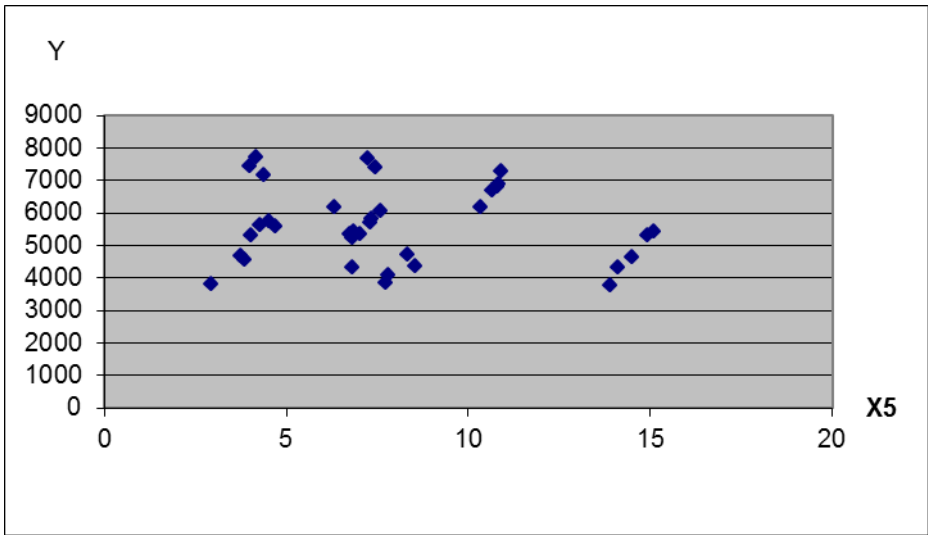
3. Отбор факторов для построения модели

На этом этапе анализируются связи между факторами (наличие коллинеарных зависимостей), а также связи каждого фактора с *y*. Подобный анализ называется корреляционным анализом, использующим показатели тесноты связи (ТС).

Для интерпретации ТС приведем следующие схемы (поля корреляции) (рис. 2.6).



(а)



(б)

Рис. 2.6. Пример полей корреляции

Полем корреляции или диаграммой рассеяния называют совокупность значений пар показателей (y и x_j или x_j и x_k) в двумерной системе координат.

На рис. (а) разброс точек незначительный, вариация исследуемого показателя y очень сильно связана с вариацией фактора x_3 . На рис. (б) связь между y и x_5 незначительна. Если фактор тесно связан с показателем, т.е. вариация фактора связана с вариацией показателя, то изменяя в нужном направлении величину фактора можно управлять исследуемым показателем.

Различают *парные* и *многофакторные* связи. Соответственно существуют *парные* и *многофакторные показатели ТС*.

В зависимости от вида связи – *линейная* и *нелинейная* – различают показатели ТС, характеризующие связь при линейной форме (*коэффициент корреляции*) и показатели ТС, способные выражать ТС при любой форме связи (*корреляционное отношение, индекс корреляции*).

При анализе исходных данных различают три вида отклонений:

а) фактического значения от среднего $y_i - \bar{y}$;

б) расчетное значение от среднего $\hat{y}_i - \bar{y}$;

в) фактическое значение от расчетного $y_i - \hat{y}_i$.

Первый тип отклонений (или общая дисперсия) возникает под воздействием всех факторов ($S_{общ}$), второй тип отклонений – под воздействием факторов, включенных в модель ($S_{факт}$), третий тип отклонений – под воздействием факторов, неучтенных в модели ($S_{ост}$), таким образом, $S_{общ} = S_{факт} + S_{ост}$.

Понять эти показатели можно с помощью рисунка (рис. 2.7):

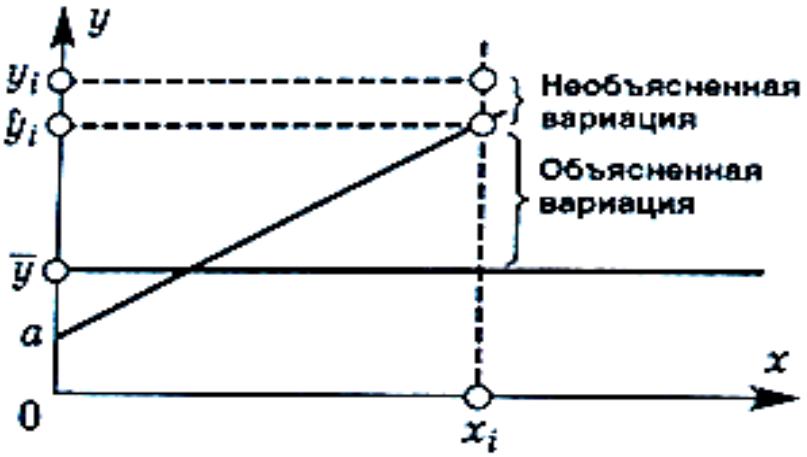


Рис. 2.7. Виды отклонений y_i

Парный коэффициент корреляции служит мерой линейной взаимосвязи между двумя измеренными величинами. Он может принимать значения между +1 и -1. Если он равен нулю, то линейная связь между y и x_j или x_j и x_k отсутствует. Если он равен +1 или -1, то связь строго линейная. Отрицательный знак у коэффициента корреляции свидетельствует об обратной связи между y и x_j или x_j и x_k, а положительный знак – о прямой линейной зависимости.

Парный коэффициент корреляции можно вычислить по формуле

$$r_{kj} = n\frac{\sum_i (x_{ik} - \bar{x}_k)(x_{ij} - \bar{x}_j)}{n\sigma_{x_k}\sigma_{x_j}}. \qquad (2.20)$$

Взаимосвязь между факторами наглядно можно представить в виде матрицы коэффициентов корреляции

$$\begin{matrix} r_{00} & r_{01} & \dots & r_{0p} \\ r_{10} & r_{11} & \dots & r_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p0} & r_{p1} & \dots & r_{pp} \end{matrix},$$

где 0 – номер показателя

1, 2, ..., p – соответствующие номера факторов.

Множественный коэффициент корреляции R является мерой линейной зависимости между y и набором факторов. 0 <= R <= 1 . Нулевое значение этого коэффициента указывает, что y не зависит (линейно) от набора факторов, а значение 1 указывает на полную линейную зависимость. Расчет коэффициента множественной корреляции производится по формуле

$$R = \sqrt{1 - \frac{S_{ост}}{S_{общ}}}. \qquad (2.21)$$

Корреляционное отношение η является универсальным показателем ТС, характеризующее ТС при любой форме между y и x_j рассчитывается таким образом

$$\eta = \sqrt{\frac{S_{факт}}{S_{общ}}}. \qquad (2.22)$$

Границы корреляционного отношения 0 и 1.

В связи с тем, что показатели ТС рассчитываются по различному числу наблюдений, необходима их проверка на надежность. При этой проверке устанавливается существенно ли отличие соответствующего показателя ТС от нуля. Для проверки этой гипотезы можно использовать t-критерий (критерий Стьюдента). Вычисляется расчетное значение этого коэффициента:

$$t_r = \frac{\mathrm{I}\, r\, \mathrm{I}}{\sigma_r} \quad t_R = \frac{R}{\sigma_R} \quad t_\eta = \frac{\eta}{\sigma_\eta}. \qquad (2.23)$$

Средние квадратические отклонения вычисляются соответственно

$$\sigma_{\hat{e}} = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n-2}}, \ \sigma_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n-p-1}}, \ \sigma_\eta = \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{n-2}}. \qquad (2.24)$$

Расчетное значение t-критерия сравнивается с табличным и если t-расчетное > t-табличное, то проверяемый показатель считается надежным. Табличное значение t-критерия определяется при уровне значимости *a* и числе степеней свободы *k*. Уровень значимости, как правило принимается равным 0,05 или 0,01. При таком *a* можно с доверительной вероятностью 0,95 и 0,99 соответственно утверждать, что соответствующий показатель ТС статистически значим или нет. Число степеней свободы равны соответственно:

– для r $k = n - 2$

– для R $k = n - p - 1$

– для η $k = n - 2$.

Коэффициенты парной корреляции r_{ij} позволяют провести анализ коллинеарности и мультиколлинеарности. ***Коллинеарными*** называются такие факторы, теснота связи между которыми очень высока (значение парного коэффициента для таких факторов >=0,8). Если тесно связанных факторов несколько, то такие факторы называются ***мультиколлинеарными***.

В регрессионную модель не должны включаться такие факторы, характеризующие одни и те же причины (условия). Наличие коллинеарности факторов может привести к парадоксальной ситуации, когда надежность модели в целом будет хорошей, а оценки параметров модели – ненадежны. Для решения вопроса борьбы с коллинеарностью факторов можно выбрать один из способов:

1) если имеются факторы, теснота связи между которыми r_{ij} >=0,8 , то сравнить соответствующие значения коэффициентов r_{yi} и r_{yj} и если $r_{yi} > r_{yj}$, то *i*-й фактор оставить, а *j*-й исключить;

2) провести нормирование данных по среднему значению или по дисперсии и снова проверить на коллинеарность факторов;

3) если показатель тесноты связи не равен по модулю 1, оставить без изменений. Если ошибка оценивания параметров модели будет в пределах допустимого – проблема решена.

4. Выбор вида регрессионной модели

На данном этапе устанавливается однофакторная или многофакторная будет строится модель и вид модели (линейный или нелинейный) .

Обоснование вида модели состоит в выборе вида функции (некоторого аналитического выражения), с помощью которого можно будет описать какое изменения показателя под воздействием факторов.

К обоснованию вида функции идут двумя путями: *теоретическим* (анализируя экономическую природу y и x_j, выдвигается гипотеза о характере изменения показателя под действием фактора) *и эмпирическим* (закон изменения показателя под действием фактора устанавливается путем анализа совокупности фактических данных).

Наиболее употребительными выражениями при описании связи одного фактора и показателя являются:

уравнение прямой $y = a_0 + a_1x_1$

уравнение параболы $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$

уравнение гиперболы $y = a + \frac{b}{x_1}$

После обоснования парных взаимосвязей переходят к записи многофакторных моделей. В экономических исследованиях чаще всего применяется линейная многофакторная модель

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots$$

В качестве нелинейных моделей применяются

полиномиальная модель $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2^2 + a_3x_3^3 + ... + \frac{a_n}{x_n}$

мультипликативная модель $y = a_0x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}...$

или $y = a_0a_1^{x_1}a_2^{x_2}a_3^{x_3}...$

Для нахождения значений параметров модели используется какой-либо математический метод, чаще всего *метод наименьших квадратов (МНК).* Этот метод можно применить как для линейных моделей, так и для нелинейных, допускающих преобразования к линейному виду.

Задача состоит в нахождении значений коэффициентов регрессии a_j и свободного члена уравнения регрессии a_0. Для применения МНК необходимо соблюдение следующих предпосылок:

1) среднее значение ошибки аппроксимации ε и ее математическое ожидание должны быть равны нулю;

2) ошибка ε должна являться случайной величиной;

3) среди факторов включенных в модель не должно быть коллинеарных (мультиколлинеарных).

При выполнении этих предпосылок коэффициенты регрессии будут *эффективными, состоятельными и несмещенными.* Оценка параметра называется несмещенной, если расчетные значения равны их математическим ожиданиям; оценка называется состоятельной, если при увеличении числа наблюдений она не изменяется; оценка называется эффективной, если она обладает наименьшей дисперсией по сравнению с другими оценками. Невыполнение предпосылок приводит к тому, что коэффициенты не выражают истинного влияния x_j на y.

Часто на результат оказывает влияние достаточно большое количество факторов и отсутствует возможность выделить из них наиболее значимые, подлежащие включению в модель регрессии. В этом случае рассматривают несколько моделей с разным составом факторов. Наилучшей является модель, имеющая значимые параметры и максимальный показатель тесноты связи.

Существует несколько алгоритмов (методов) перебора моделей, например, метод включения факторов, метод исключения факторов, шаговый регрессионный анализ, ступенчатый регрессионный анализ.

Метод последовательного включения факторов предполагает, что сначала будет построена модель с фактором, наиболее тесно связанным с результатом. Затем поочередно добавляются другие факторы. Каждый раз оценивается целесообразность включения нового фактора с точки зрения сокращения остаточной дисперсии.

При использовании метода исключения факторов сначала строится модель с максимально большим количеством факторов, из которых затем поочередно исключаются незначимые факторы до тех пор, пока модель не будет иметь только значимые параметры при факторах.

Шаговый регрессионный анализ можно рассматривать как развитие метода включения факторов. Построение модели начинается с расчета парной

регрессии с фактором, наиболее тесно связанным с результатом. Добавление каждого фактора сопровождается не только оценкой значимости включения данного фактора, но и проверкой значимости влияния на результат прочих факторов, уже включенных в модель. Выявленные незначимые факторы исключаются из модели. Процесс завершается, если добавление нового фактора не приводит к заметному улучшению качества модели.

С построения парного уравнения регрессии с наиболее значимым (по степени влияния на результат) фактором начинается и ступенчатый регрессионный анализ. Затем по полученной модели находят случайные остатки ε. Т.к. эти остатки отражают влияние факторов, не включенных в модель, далее строится уравнение зависимости ε от следующего по степени влияния на результат фактора. По этому уравнению также находят случайные остатки, которые рассматривают как результат влияния третьего фактора. Процедура повторяется до тех пор, пока вновь полученное уравнение регрессии значимо. Этот метод недостаточно точен, т.к. не учитывает взаимосвязь факторов.

5. Проверка адекватности модели

Такая проверка производится с помощью статистических критериев и на их основе делается вывод о статистической надежности построенного уравнения регрессии, о пригодности модели для анализа и прогнозирования исследуемого показателя.

Для проверки надежности модели в целом используется отношение фактической дисперсии к остаточной $\frac{S_{факт}}{S_{ост}}$. Известно, что отношение этих дисперсий подчиняется распределению Фишера (F-распределение). Расчетное значение F-отношения сравнивается с табличным значением, которое определяется для конкретного уровня значимости α . В экономических исследованиях α принимается равным 0,05 (реже 0,01), число степеней свободы $k_1 = p, k_2 = n - p - 1.$ Если F-расч > Fтабл , то построенная модель считается статистически надежной, а следовательно, правильно отражает закон распределения функции за счет изменения факторов.

Для измерения точности построенной модели используется *средняя относительная ошибка аппроксимации*

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i - \overline{y}_i|}{y_i}\cdot 100\% \qquad (2.25)$$

Для экономических расчетов применяются следующие уровни ошибки аппроксимации: если ошибка до 10 %, то построенное уравнение регрессии достаточно точно выражает закон изменения исследуемого показателя под действием факторов и приемлем для целей анализа; в случае построения модели для прогнозирования допустимое значение ошибки – до 3–4 %.

Проверку надежности параметров уравнения регрессии проводят с использованием *t-критерия*. Расчетное значение вычисляется по формуле

$$t = \frac{|a_j|}{\sigma_{a_j}}, \quad \sigma_{a_j} = \frac{S_{ост}}{\sigma_{x_j}\sqrt{n}\sqrt{1 - R^2_{j.1,2,...,j-1,j+1,p}}}. \qquad (2.26)$$

Фактическое значение *t*-критерия сравнивается с табличным и если $t_{факт} > t_{рас}(t_{a,k}, \alpha = 0{,}05(0{,}01), k = n - p - 1)$, то тогда соответствующий коэффициент регрессии значим, т.е. отличен от нуля, а влияние *j*-го фактора следует считать сильным.

6. Интерпретация полученных результатов

На этом этапе разрабатываются рекомендации об использовании результатов моделирования. Анализируется уравнение регрессии в натуральном масштабе: коэффициент регрессии a_j показывает на сколько своих единиц измерения в среднем изменится показатель, при увеличении *j*-го фактора на единицу своего измерения, при условии, что все остальные факторы находятся на постоянном уровне; свободный член уравнения характеризует изменение показателя за счет изменения факторов неучтенных в модели.

В связи с тем, что факторы имеют различный физический смысл и различные единицы измерения, их нельзя сравнивать между собой и следовательно трудно определить какой из факторов оказывает наибольшее влияние. Для устранения различий в единицах измерения применяют ***частные коэффициенты эластичности***

$$Э_j = a_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}} \qquad (2.27)$$

характеризующие на сколько % в среднем изменится у при увеличении *j-го* фактора на 1 % при фиксированном положении других факторов.

При определении степени влияния отдельных факторов необходим показатель, который бы учитывал влияние анализируемых факторов с учетом различий в уровне их колеблемости. Таким показателем является ***коэффициент регрессии в стандартизированном масштабе***

$$\beta_j = a_j \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y} \qquad (2.28)$$

Коэффициент β_j показывает на сколько своих средних квадратических отклонений изменится у при изменении *j-го* фактора на одно свое среднее квадратическое отклонение при фиксированном значении остальных факторов. Уравнение регрессии в стандартизированном масштабе:

$$\bar{t}_{0.1,2,...,p} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j t_j, \text{ где } t_j = \frac{x_j - \bar{x}_j}{\sigma_{x_j}}. \qquad (2.29)$$

С помощью коэффициентов регрессии в стандартизованном масштабе можно рассчитать долю влияния каждого фактора:

$$\omega_j = \beta_j \frac{r_{yx_j}}{R^2}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \omega_j = 1.0 \qquad (2.30)$$

Границы влияния фактора на показатель

$a_j^- = a_j - \Delta a_j$ (левая граница) $a_j^+ + a_j + \Delta a_j$ (правая граница),

где ***доверительные полуинтервалы*** (Δa_j) рассчитываются по формуле

$$\Delta a_j = t_{\alpha,k} \sigma_{a_j}. \qquad (2.31)$$

2.5. Прогнозирование на основе моделей трендов

Моделью тренда называют функцию, описывающую тенденцию изменения показателя во времени $\widetilde{y}_t = f(t)$. Экстраполяция тенденций динамических рядов широко применяется на практике в силу ее простоты и возможности осуществления на основе относительно небольшого объема информации. Она допустима и правомерна при выполнении следующих условий:

1. Период предыстории, за который построена модель тренда, должен быть достаточным для выявления тенденции развития показателя;
2. Анализируемый процесс является устойчивым и обладает инерционностью, то есть для значительных изменений характеристик ряда (в частности, для перехода к другому типу развития) требуется продолжительный период;
3. Не ожидается сильных внешних воздействий на изучаемый процесс, которые могут серьезно повлиять на тенденцию развития.

Экстраполяция по трендам может применяться и как начальный этап комплексной методики прогнозирования, отвечающий на вопрос о последствиях продолжения прежней тенденции развития. В этом случае экстраполяционный прогноз интерпретируется как один из гипотетических вариантов, с которым сопоставляются другие варианты прогноза, полученные с помощью более совершенных методов.

Операцию экстраполяции по модели тренда можно представить так:

$$\widetilde{y}(T+\ell) = f(y_T, \ell, a_j), \qquad (2.32)$$

где $\widetilde{y}(T+\ell)$ – прогнозируемый уровень ряда,

f – функция, с помощью которой описывают тренд,

y_T – уровень ряда, принятый за базу экстраполяции,

ℓ – период упреждения прогноза,

a_j – параметр уравнения тренда.

Процесс прогнозирования по модели тренда состоит из следующих этапов:

1. Выбор функции для описания тренда,
2. Оценка параметров модели (моделей) тренда,
3. Проверка адекватности и точности модели тренда,

4. Расчет точечного и интервального прогнозов.

2.5.1. Функции, используемые для описания трендов

Выбор модели тренда осуществляют путем сопоставления тенденции изменения уровней ряда динамики с функциями, которые могут быть использованы для описания закона изменения прогнозируемого показателя. Поэтому необходимо знать особенности функций, которые могут быть использованы в качестве моделей трендов.

В литературе описано несколько десятков математических функций, которые можно использовать для описания тенденции экономических показателей. Наиболее часто при прогнозировании социально-экономических явлений, имеющих тенденцию, применяют три вида функций: полиномиальные, экспоненциальные, S – образные.

Из полиномиальных функций для целей прогнозирования в экономике чаще всего используют полиномы первой, второй и третьей степени:

$$\widetilde{y}_t = a_0 + a_1 * t \qquad (2.33)$$

$$\widetilde{y}_t = a_0 + a_1 * t + a_2 * t^2 \qquad (2.34)$$

$$\widetilde{y}_t = a_0 + a_1 * t + a_2 * t^2 + a_3 * t^3 \qquad (2.35)$$

Имеются две причины, по которым ограничиваются полиномами не выше третьей степени:

1. Законы изменения экономических временных рядов чаще всего имеют достаточно простой характер.

2. Параметры указанных полиномов имеют экономическую интерпретацию. Параметр a_0 характеризует уровень ряда при $t = 0$, параметр a_1 – средний прирост, параметр a_2 – скорость изменения среднего прироста, параметр a_3 – изменение ускорения роста.

Если рассчитать первые приросты $u_t = \widetilde{y}_t - \widetilde{y}_{t-1}$ для полинома первой степени, то они будут одинаковы и равны параметру a_1, для полиномов второй степени первые приросты будут иметь линейный характер, а вторые приросты $u_t^{[2]} = u_t - u_{t-1}$ будут постоянны и равны $2a_2$. У полиномов третьего порядка по линейному закону изменяются вторые приросты, а постоянны третьи приросты $u_t^{[3]} = u_t^{[2]} - u_{t-1}^{[2]}$. Таким образом, уравнение прямой применяют для описания процессов равномерно изменяющихся во времени, параболу второй степени – для описания процессов, имеющих равноускоренный рост или равноускоренное снижение уровней ряда, кубическую параболу – когда наблюдается разный характер в изменении ускорения роста.

Экспоненциальные функции используют для описания тех процессов, в изменении которых наблюдаются резкие темпы роста (снижения) и могут присутствовать различного рода ограничения развития. Из этого класса функций в экономике чаще всего применяют простую экспоненту (показательную функцию) и модифицированную экспоненту.

Простая экспонента имеет вид

$$\tilde{y}_t = ae^{-bt} \qquad (2.36)$$

где a и b – положительные числа, если $b > 1$, то функция возрастает с ростом времени t, если $b < 1$ – функция убывает.

Для показательной функции постоянны темпы роста и приросты. Если выражение (2.36) прологарифмировать по любому основанию $\log \tilde{y}_t = \log a + t \log b$ и ввести обозначения $\log a = c$ и $\log b = d$, получим $\log \tilde{y}_t = c + dt$. Отсюда видно, что логарифмы ординат линейно зависят от времени.

Когда процесс имеет насыщение, для его описания следует использовать функцию, имеющую асимптоту, отличную от нуля. Представителем этого вида функций является *модифицированная экспонента*

$$\tilde{y}_t = k + ae^{-bt} \qquad (2.37)$$

Эта функция имеет горизонтальную асимптоту $y = k$. График функции стремится к асимптоте либо при $t \to \infty$, либо при $t \to -\infty$, но никогда ее не пересекает. Если параметр $a < 0$, то асимптота находится выше кривой; если $a > 0$, то асимптота проходит ниже кривой. Параметр b может быть больше или меньше единицы. Таким образом, возможны четыре варианта этих функций. Чаще всего используют модифицированную экспоненту, когда $a < 0$ и $b < 1$.

Для модифицированной экспоненты параметр b равен отношению последовательных приростов ($b = u_t / u_{t-1}$) и является постоянной величиной. Логарифмы приростов ординат этой функции ($u_t = \tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1}$) линейно зависят от переменной t.

К этому же классу функций относят показательную функцию $\tilde{y}_t = ab^t$ и логарифмическую параболу $\tilde{y}_t = ab^t c^{t^2}$.

S-образные функции используют для описания двух последовательных лавинообразных процесса: один с ускорением развития, другой – с замедлением. Графики их функций напоминают латинскую букву S, отсюда и название данного класса функций. Эти функции находят применение для описания демографических процессов, в страховании, могут применяться для описания процессов распространения новшеств и изобретений. Представители этого класса функций – *кривая Гомперца и логистическая кривая*.

Аналитическое выражение функции Гомперца:

$$\tilde{y}_t = ka^{b^t} \qquad (2.38)$$

где a, b – положительные параметры,

k – асимптота функции.

Для графика функции Гомперца характерны четыре участка: на первом – прирост функции незначителен, на втором – прирост резко увеличивается, на третьем участке (после перегиба функции) приросты начинают замедляться, на четвертом (вблизи асимптоты функции) – приросты опять незначительны. Если прологарифмировать уравнение кривой Гомперца, то получим $\log \tilde{y}_t = \log k + b^t \log a$. Отсюда видно, что логарифм функции представляет собой модифицированную

экспоненту. Линейной функцией времени является логарифм отношения первого прироста к самой ординате функции.

Если в модифицированной экспоненте () вместо $\widetilde{y}_t$ ввести обратную величину $1/\widetilde{y}_t$, то получим второй тип S- образной функции – логистическую кривую, которую называют еще кривой Перла-Рида:

$$\frac{1}{\widetilde{y}_t} = k + ab^t \tag{2.39}$$

Обычно логистическую функцию записывают в таком виде:

$$\widetilde{y}_t = \frac{k}{1 + ae^{f(t)}} \tag{2.40}$$

где e – основание натурального логарифма,

$f(t)$ – некоторая функция от t. Если $f(t) = -bt$, то функция будет иметь следующий вид

$$\widetilde{y}_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}} \tag{2.41}$$

Чаще всего используют логистическую функцию вида:

$$\widetilde{y}_t = \frac{k}{1 + 10^{c+dt}} \tag{2.42}$$

Выражение (2.42) можно получить из (2.41), если, основание натурального логарифма заменить на 10 и принять $a = 1$, $f(t) = c + dt$.

График логистической кривой похож на график кривой Гомперца. Отличие состоит в том, что логистическая кривая центрально симметрична относительно точки перегиба. При $t \to -\infty$ ордината стремится к нулю, а при $t \to \infty$ ордината стремится к асимптоте. Для логистической кривой линейной функцией от времени является логарифм отношения первого прироста функции к квадрату ее значения.

2.5.2. Выбор вида функции и оценка ее параметров

Выбор вида модели тренда состоит из следующих этапов:

1. Логический анализ прогнозируемого явления (процесса).
2. Визуальный анализ уровней ряда.
3. Формальный анализ ретроспективного ряда динамики.

Содержание логического анализа сводится к тому, чтобы понять природу динамики изучаемого явления (процесса). При проведении этого этапа стараются получить ответы на следующие вопросы:

1. Каковы темпы развития процесса? В каком направлении пойдет развитие процесса в будущем?
2. Возможно ли изменение темпов в периоде упреждения прогноза?
3. Следует ли ожидать в развитии процесса скачкообразного изменения?
4. Могут ли возникнуть точки перегиба?
5. Существуют ли пределы развития экономического явления?

При проведении логического анализа используют экономические знания конкретной предметной области. Для процессов со сложной динамикой развития важно определить, на каком этапе изменения процесса анализируется и экстраполируется ряд динамики. При выборе модели тренда обязательно следует иметь в виду, что выбираемая функция должна не только описывать изменение экономического показателя в предыстории, но и описывать динамику развития показателя в периоде упреждения прогноза. В результате этого анализа делают вывод о том, какого класса функция может быть использована для целей прогнозирования.

На втором этапе строят график, характеризующий изменение показателя в периоде предыстории, и сопоставляют этот график с графиками выбранного класса функций. Проводя этот анализ, можно воспользоваться опытом прогнозирования аналогичных процессов, описанным в литературе.

Если после выполнения первых двух этапов не сделан окончательный выбор модели тренда, то приступают к третьему этапу. Содержание этого этапа сводится к сопоставлению характеристик изучаемого процесса с характеристиками функций, которые могут быть использованы в качестве моделей трендов.

Для этого, используя скользящие средние, осуществляют сглаживание уровней ряда динамики. По сглаженным уровням ряда ($\tilde{\tilde{y}}_t$) рассчитывают приросты первого ($\tilde{u}_t$), второго ($\tilde{u}_t^{[2]}$) порядков и ряд других характеристик. Полученные характеристики анализируют на линейность и постоянство, сопоставляют с характеристиками функций. В табл. 2.6 приводится взаимосвязь этих характеристик и различных функций.

Таблица 2.6

Характеристики различных функций

Показатель	Характер изменения показателя во времени	Вид функции
$\tilde{u}_t$	примерно одинаковы	уравнение прямой $\tilde{y}_t = a_0 + a_1 * t$
$\tilde{u}_t$	изменяются линейно	квадратичная парабола $\tilde{y}_t = a_0 + a_1 * t + a_2 * t^2$
$\tilde{u}_t^{[2]}$	изменяются линейно	кубическая парабола $\tilde{y}_t = a_0 + a_1 * t + a_2 * t^2 + a_3 * t^3$
$\tilde{u}_t / \tilde{\tilde{y}}_t$	примерно одинаковы	простая экспонента $\tilde{y}_t = ae^{-bt}$
$\tilde{u}_t / \tilde{\tilde{y}}_t$	изменяются линейно	логарифмическая парабола $\tilde{y}_t = ab^t c^{t^2}$
$\log \tilde{u}_t$	изменяются линейно	модифицированная экспонента $\tilde{y}_t = k + ae^{-bt}$
$\log(\tilde{u}_t / \tilde{y}_t)$	изменяются линейно	кривая Гомперца $\tilde{y}_t = ka^{b^t}$
$\log(\tilde{u}_t / \tilde{y}_t^2)$	изменяются линейно	логистическая кривая $\tilde{y}_t = \dfrac{k}{1 + ae^{f(t)}}$

Если в результате анализа выбрано несколько функций, то окончательный выбор делают после оценки параметров функций и проверки адекватности и точности модели.

Для оценки параметров функции используют метод наименьших квадратов, в котором минимизируется сумма квадратов невязок:

$$S = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \widetilde{y}_t)^2 \longrightarrow \min \qquad (2.43)$$

где y_t – фактические уровни ряда,

$\widetilde{y}_t$ – уровни ряда, рассчитанные по модели тренда.

В (2.43) вместо $\widetilde{y}_t$ подставляют выбранную функцию, полученное выражение дифференцируют по неизвестным параметрам и в результате преобразований получают систему уравнений. Например, для линейной модели тренда система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{T} y_t = a_0 * T + a_1 * \sum_{t=1}^{T} t \\ &\sum_{t=1}^{T} y_t * t = a_0 * \sum_{t=1}^{T} t + a_1 * \sum_{t=1}^{T} t^2 \end{aligned} \qquad (2.44)$$

В результате решения системы уравнений находят параметры модели тренда. Обычно для оценки параметров используют стандартные программные средства. Если выбранная функция имеет нелинейный характер и не может быть приведена к линейному виду, для оценки ее параметров используют нелинейный метод наименьших квадратов или другие методы.

2.5.3. Проверка адекватности и точности модели тренда

Модель можно использовать для целей прогнозирования, если она адекватна изучаемому процессу и описывает его достаточно точно. Модель тренда считается адекватной, если она действительно отражает тенденцию изменения уровней ряда. Это требование эквивалентно тому, что отклонения фактических уровней ряда от рассчитанных по модели тренда ε_t имеют случайный характер, то есть изменение остатков не связано с изменением времени.

Для проверки случайности отклонений используют *критерий серий*, основанный на медиане выборки. Отклонения от тренда $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_t, ..., \varepsilon_T$ ранжируют по возрастанию и в полученном ряду находят медиану ε_{med}. Затем возвращаются к исходному ряду отклонений и сравнивают каждое отклонение ε_t с ε_{med}. Если $\varepsilon_t > \varepsilon_{med}$, то ставят знак плюс, если $\varepsilon_t < \varepsilon_{med}$ – знак минус, когда отклонение равно медиане, никакого знака не ставят. В результате получают ряд, состоящий из последовательности плюсов и минусов. Если отклонения от тренда случайны, то чередование этих знаков также должно быть случайно. Последовательность подряд идущих плюсов или минусов называют серией. Ряд

плюсов и минусов характеризуется количеством серий и протяженностью самой большой серии.

Подсчитывают протяженность самой длинной серии $K_{\max}(T)$ и общее число серий $V(T)$. Для того чтобы отклонения от тренда можно было считать случайными, протяженность самой длинной серии не должна быть слишком большой, а общее число серий – слишком маленьким. Отклонения можно считать случайными, если выполняются следующие условия (для 5 % уровня значимости):

$$K_{\max}(T) < [3{,}3(\lg T + 1)] \tag{2.45}$$

$$V(T) > [1/2(T + 1 - 1{,}96\sqrt{T-1})] \tag{2.46}$$

В этих выражениях квадратные скобки означают целую часть числа. Если хотя бы одно из этих неравенств нарушается, то гипотеза о случайном характере отклонений уровней временного ряда от тренда отвергается.

Точность модели характеризует близость фактических уровней ряда y_t и рассчитанных по модели $\widetilde{y}_t$. Оценивать точность имеет смысл только для адекватных моделей. В качестве показателей точности применяют следующие:

остаточное среднее квадратическое отклонение

$$S_{ост} = \sqrt{\frac{\sum_1^T (y_t - \widetilde{y})^2}{T - g}} \tag{2.47}$$

средняя относительная ошибка аппроксимации

$$\overline{E} = 1/T \sum_1^T \left(\left| y_t - \widetilde{y}_t \right| y_t \right) * 100\% \tag{2.48}$$

коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \sum_1^T \left(y_t - \widetilde{y}_t \right)^2 / \sum_1^T \left(y_t - \overline{y} \right)^2 \tag{2.49}$$

В формулах (2.47 – 2.49) T – число уровней ряда, g – количество параметров модели, y_t – фактические уровни ряда, $\widetilde{y}_t$ – уровни ряда, рассчитанные по модели, $\overline{y}$ – среднее арифметическое значение уровней ряда.

Используя эти показатели, можно из нескольких адекватных моделей выбрать наиболее точную. Но при этом не следует, что данные показатели точности модели рассчитываются для уровней предыстории и поэтому отражают лишь точность аппроксимации. Для оценки прогнозных свойств модели целесообразно использовать ретроспективный прогноз.

2.5.4. Прогнозирование по модели тренда

Чтобы по модели тренда получить точечный прогноз, необходимо в полученное уравнение тренда вместо переменной t подставить $t = T + \ell$. Недостаточность точечного прогноза и необходимость расчета интервального прогноза определяется следующими моментами:

1. Выбор модели тренда носит субъективный характер.

2. Оценивание параметров уравнения тренда производиться на основе ограниченного числа наблюдений, каждое из которых содержит случайную компоненту, поэтому параметрам уравнения тренда и его положению в пространстве свойственна некоторая неопределенность.

3. Тренд характеризует тенденцию изменения показателя. Фактические же уровни ряда отклоняются от уровней ряда, рассчитанных по уравнению тренда. Эти отклонения будут наблюдаться и в периоде упреждения прогноза.

Погрешность, связанная со вторым и третьим условием, может быть отражена в виде доверительного интервала:

левая (нижняя) граница $\widetilde{y}_{T+\ell}^{\min} = \widetilde{y}_{T+\ell} - \Delta$

правая (верхняя) граница $\widetilde{y}_{T+\ell}^{\max} = \widetilde{y}_{T+\ell} + \Delta$,

где Δ – доверительный полуинтервал.

$$\Delta = t_{\alpha,\nu} * S_{пр} \tag{2.50}$$

Среднеквадратическая ошибка прогнозирования $S_{пр}$ должна учитывать ошибку, допущенную при оценке параметров тренда, и отклонения от самого тренда:

$$S_{пр} = S_{ост} * K \tag{2.51}$$

где $S_{ост}$ – среднеквадратическая ошибка отклонений фактических уровней ряда y_t от уровней ряда, рассчитанных по уравнению тренда $\widetilde{y}_t$

Коэффициент K рассчитывают с учетом соотношения между длинной периода предыстории T и периодом упреждения прогноза L. Например, если для прогнозирования используется линейная модель тренда, то коэффициент K следует рассчитывать по следующей формуле:

$$K = \sqrt{\frac{(T+\ell)}{T} + \frac{(t_1 - \widetilde{t})^2}{\sum_1^T (t_1 - \widetilde{t})^2}}, \tag{2.52}$$

где $t_1 = T + \ell$, а $\widetilde{t} = T + 1/2$.

2.6. Прогнозирование по мультипликативной и аддитивной моделям

2.6.1. Экономические показатели, на изменение которых влияет фактор сезонности. Модели их прогнозирования

Когда экономические показатели представляют собой внутригодовые данные, в их изменении обычно наблюдаются устойчивые сезонные колебания. В одних случаях они могут быть вызваны сезонностью производства (сельское хозяйство, транспорт, торговля, сфера обслуживания и т.д.), в других – социально-экономическими факторами.

Уровни таких рядов, как правило, состоят из трех составляющих: трендовая, сезонная и случайная. Это значит, что на основную тенденцию изменения показателя налагается сезонная составляющая. Сезонная компонента представ-

ляет такие отклонения уровней ряда от тренда, которые имеют одинаковый характер и повторяются в одни и те же периоды года.

Для оценки воздействия фактора сезонности на изменение экономического показателя обычно достаточно содержательного анализа экономической природы показателя и графического отображения наблюдений за два-три года.

Измерение внутригодовых колебаний показателя может определяться (анализироваться) различными способами. Простейшим является вычисление удельного веса каждого уровня в суммарном годовом объеме. Полученные значения обычно усредняются по одноименным моментам времени (кварталам, месяцам, временам года), что позволяет получить более устойчивые оценки.

Другой способ – сравнение каждого наблюдения со среднегодовым уровнем соответствующего года. В результате такого сравнения получают так называемые коэффициенты сезонности. Если отклонения фактических уровней от среднего вычисляют в виде разности, то коэффициенты называются аддитивными, а если в форме отношения – мультипликативными. Достоинство данного способа – его простота, недостаток – он не учитывает наличие случайных колебаний и тенденцию изменения среднего уровня и сезонной волны. В какой-то мере уменьшает этот недостаток предварительное сглаживание и выделение тенденции при помощи скользящей средней.

Для прогнозирования показателей, на изменение которых оказывает влияние фактор сезонности, могут использоваться различные модели, например, авторегрессионные или модели Бокса-Дженкинса. Когда в уровнях ряда присутствует тенденция и сезонная составляющая, проще всего показатель прогнозировать, скорректировав модель тренда с учетов сезонных колебаний.

Для этих целей используют мультипликативную или аддитивную модели, которые имеют следующий вид:

мультипликативная

$$Y(t) = Tr(t) * S(t) * E(t) \qquad (2.53а)$$

аддитивная

$$Y(t) = Tr(t) + S(t) + E(T) \qquad (2.53б)$$

где t – период времени, $t = 1,2,...,T$;

$Y(t)$ – фактические уровни ряда;

$Tr(t)$ – составляющая, характеризующая основную тенденцию (тренд);

$S(t)$ – сезонная составляющая;

$E(t)$ – случайная составляющая.

2.6.2. Технология прогнозирования по мультипликативной и аддитивной моделям

Процесс разработки прогнозов по мультипликативной и аддитивной моделям состоит из трех этапов и отличается только некоторыми нюансами.

Первый этап. Сглаживание фактических уровней ряда.

Выполняется для того, чтобы представить тенденцию изменения показателя и выделить сезонную составляющую.

Для сглаживания необходимо определить период сглаживания m. Продолжительность этого периода следует принимать равной тому отрезку времени, через который повторяется однотипный эффект сезонности. Его величину определяют в результате качественного анализа экономического показателя и изучения закономерности изменения фактических уровней ряда, представленных графически. Если величина показателя измеряется помесячно, то продолжительность периода сглаживания скорее всего будет равна 12, хотя может быть и иной. Для квартальных данных или данных, собранных по временам года (зима, весна, лето, осень), период сглаживания будет равен 4.

Сглаженные уровни показателя $Z(t)$ рассчитывают по формуле:

$$Z(t) = [\frac{1}{2} * Y(t-p) + ... + Y(t-1) + Y(t) + Y(t+1) + ... + \frac{1}{2} * Y(t+p)]/m, \quad (2.54)$$

где p равняется $m/2$;

t изменяется от $(p+1)$ до $(T-p)$.

Второй этап. Выделение сезонной составляющей.

Вначале выделяют сезонную и случайную составляющие уровней ряда:

$$S(t) * E(t) = Y(t)/Z(t) \quad (2.55а)$$

$$S(t) + E(t) = Y(t) - Z(t) \quad (2.55б)$$

Строго говоря, в этих формулах $E(t)$ характеризует лишь часть случайной составляющей, так как другая ее часть содержится в уровнях ряда $Z(t)$. Условность применяемой процедуры выделения сезонной составляющей состоит еще и в том, что при сглаживании теряется часть данных из предыстории.

Затем определяют величину сезонной составляющей уровней ряда для каждого i – го периода года S_i, $i = 1,2,...,m$. Для этого по одноименным периодам года рассчитывают значения $S_i * E_i$ (как простую среднюю) и исключают из них E_i. Так как при использовании мультипликативной модели сезонная составляющая колеблется около 1, а при использовании аддитивной модели – около нуля, то E_i можно исключить, выполнив следующие условия:

$$\sum_1^m S_i = m \quad (2.56а)$$

$$\sum_1^m S_i = 0 \quad (2.56б)$$

Если для расчетов используется табличный процессор Excel, то выполнение условий (4а) и (4б) можно получить, воспользовавшись функцией Сервис – Поиск решения.

Анализируя величину сезонной составляющей, можно делать выводы о том, как сильно влияет сезонный фактор на изменение показателя и одинаково ли это влияние в одноименные периоды года на всей предыстории.

Уровни ряда без учета сезонной составляющей $X(t)$ определяют так:

$$X(t) = Y(t) / S_i \qquad (2.57а)$$

$$X(t) = Y(t) - S_i, \qquad (2.57б)$$

где $t = j * m + i$; $j = 0,1,2,...,(k-1)$; $k = T / m$; для каждого j $i = 1,2,3,...,m$.

Третий этап. Расчет прогнозов

Точечный и интервальные прогнозы рассчитывают на требуемый период упреждения прогноза L. Например, менеджер туристической фирмы желает иметь информацию о том, какие объемы продаж путевок по сезонам года (зима, весна, лето, осень) можно ожидать в следующем году. В этом случае период упреждения прогноза будет равен четырем.

Расчет точечного прогноза $Y(T+\ell)$ $(\ell = 1,2,3,...,L)$ состоит из расчета трендовой составляющей уровней ряда для периода $(T+\ell)$ и учета влияния сезонного фактора.

Параметры уравнения тренда находят по $X(t)$. Вид уравнения тренда подбирается таким образом, чтобы оно как можно точнее описывало изменение уровней ряда $X(t)$. В пакете Excel для расчета параметров уравнения можно использовать функцию Сервис – Анализ данных – Регрессия.

Далее значение показателя, рассчитанное по уравнению тренда для периода $(T+\ell)$, корректируют на соответствующую величину сезонной составляющей. Если сезонная составляющая не меняется от года к году в периоде предыстории, то корректировку проводят по формулам:

$$Y(T+\ell) = Tr(T+\ell) * S_i \qquad (2.58а)$$

$$Y(T+\ell) = Tr(T+\ell) + S_i \qquad (2.58б)$$

В противном случае величину S_i для периода $(T+\ell)$ нужно определять по уравнениям тренда или по методу экспоненциального сглаживания.

Интервальный прогноз определяют так:

$$\text{левая граница } Y(T+\ell) - \Delta \qquad (2.59)$$

$$\text{правая граница } Y(T+\ell) + \Delta, \qquad (2.60)$$

где Δ – доверительный полуинтервал.

Доверительный полуинтервал рассчитывают по формуле:

$$\Delta = t_{\alpha,\nu} * S_{ост}, \qquad (2.61)$$

где $t_{\alpha,\nu}$ – табличное значение критерия Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы ν;

$S_{ост}$ – остаточное среднеквадратическое отклонение.

$$S_{ост.} = \sqrt{\sum_1^T \left[U(t) - \bar{U} \right]^2 \Big/ (T-1)}, \qquad (2.62)$$

где $U(t)$ – остаточные отклонения,

$\bar{U}$ – среднее значение остаточного отклонения;

T – длина периода предыстории.

Остаточные отклонения $U(t)$ определяют так:

$$U(t) = Y(t) - Tr(t) * S_i \qquad (2.63а)$$

$$U(t) = Y(t) - [Tr(t) + S_i] \qquad (2.63б)$$

Если в периоде предыстории значения сезонной составляющей очень сильно колеблются от года к году, то для прогнозирования лучше использовать мультипликативную модель. В этом случае интервальный прогноз (при одной и той же доверительной вероятности) будет уже, чем при использовании аддитивной модели.

2.6.3. Использование фиктивных переменных для оценки сезонности в модели тренда

Более простой способ построения модели тренда с учетом сезонности заключается во включении в модель фиктивных переменных. Количество фиктивных переменных в такой модели должно быть на единицу меньше числа сезонов в течение года. Например, при моделировании поквартальных данных модель должна включать фактор времени и три фиктивные переменные. Каждая фиктивная переменная отражает сезонную компоненту временного ряда для какого-либо одного периода. Она равна единице для данного периода и нулю для всех остальных периодов.

Пусть имеется временной ряд, содержащий сезонные колебания периодичностью m. Модель регрессии с фиктивными переменными для этого ряда будет иметь вид:

$$y(t) = a + bt + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_{m-1}x_{m-1} \qquad (2.64)$$

где $x_j = \begin{cases} 1 \text{ для каждого } j \text{ внутри года,} \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$

Например, при моделировании сезонных колебаний на основе поквартальных данных за несколько лет число кварталов внутри одного года m=4, а общий вид модели следующий:

$$y(t) = a + bt + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \qquad (2.65)$$

где $x_1 = \begin{cases} 1 \text{ для первого квартала,} \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$

где $x_2 = \begin{cases} 2 \text{ для второго квартала,} \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$

где $x_3 = \begin{cases} 1 \text{ для третьего квартала,} \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$

Уравнение тренда для каждого квартала будет иметь следующий вид:

для I квартала: $y(t) = a + bt + c_1$ (2.66)

для II квартала: $y(t) = a + bt + c_2$ (2.67)

для III квартала: $y(t) = a + bt + c_3$ (2.68)

для IV квартала: $y(t) = a + bt$ (2.70)

Таким образом, фиктивные переменные позволяют дифференцировать величину свободного члена уравнения регрессии для каждого квартала. Она составит:

– для I квартала: $(a + c_1)$;
– для II квартала: $(a + c_2)$;
– для III квартала: $(a + c_3)$;
– для IV квартала: a.

Параметр b в этой модели характеризует среднее абсолютное изменение уровней ряда под воздействием тенденции. В сущности, модель (2.65) есть аналог аддитивной модели временного ряда, поскольку фактический уровень временного ряда есть сумма трендовой, сезонной и случайной компонент.

Пример применения фиктивных переменных для учета сезонной составляющей.

Построим модель регрессии с включением фактора времени и фиктивных переменных для данных об объемах продаж. В данной модели четыре независимые переменные: t, x_1, x_2, x_3, и результативная переменная y. Составим матрицу исходных данных (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Исходные данные для расчета параметров уравнения регрессии с фиктивными переменными по временному ряду объемов продаж

y	t	x1	x2	x3
88	1	1	0	0
186	2	0	1	0
304	3	0	0	1
132	4	0	0	0
93	5	1	0	0
195	6	0	1	0
327	7	0	0	1
150	8	0	0	0
97	9	1	0	0
206	10	0	1	0
331	11	0	0	1
159	12	0	0	0
101	13	1	0	0
209	14	0	1	0
343	15	0	0	1
168	16	0	0	0

В результате применения встроенного в Excel пакета анализа («Регрессия») были получены следующие результаты:

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,998709667
R-квадрат	0,997420999
Нормированный R-квадрат	0,99648318
Стандартная ошибка	5,267719016
Наблюдения	16

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	4	118049,7	29512,425	1063,554363	3,75792E-14
Остаток	11	305,2375	27,74886364		
Итого	15	118354,9375			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95 %*	*Верхние 95 %*
Y-пересечение	129,6875	3,950789262	32,82571947	2,50204E-12	120,9918715	138,3831285
t	2,25625	0,294474445	7,661955178	9,82405E-06	1,608116117	2,904383883
x1	-50,73125	3,828167787	–13,25209678	4,16794E-08	–59,15699049	–42,30550951
x2	51,2625	3,771112914	13,59346728	3,198E-08	42,96233644	59,56266356
x3	176,25625	3,736461831	47,17196587	4,76047E-14	168,032353	184,480147

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	*Предсказанное y*	*Остатки*
1	81,2125	6,7875
2	185,4625	0,5375
3	312,7125	–8,7125
4	138,7125	–6,7125
5	90,2375	2,7625
6	194,4875	0,5125
7	321,7375	5,2625
8	147,7375	2,2625
9	99,2625	–2,2625
10	203,5125	2,4875
11	330,7625	0,2375
12	156,7625	2,2375
13	108,2875	–7,2875
14	212,5375	–3,5375
15	339,7875	3,2125
16	165,7875	2,2125
Среднеквадратическое отклонение остатков		4,511005062

Проанализируем эти результаты. Влияние сезонной компоненты в каждом квартале статистически значимо (фактические значения t-статистики по модулю больше табличного, равного 2,2). Параметр a = 129,6875 есть сумма начального уровня ряда и сезонной компоненты в четвертом квартале. Сезонные колебания в первом квартале приводят к снижению этой величины (отрицательное значение коэффициента), а во втором и третьем кварталах – к повышению (положительные значения коэффициентов). Отметим, что эти параметры не равны значению сезонной компоненты, поскольку они характеризуют не сезонные изменения уровней ряда, а их отклонения от уровней, учитывающих сезонные воздействия в четвертом квартале. Положительная величина параметра b = 2,25625 при переменной времени свидетельствует о наличии возрастающей тенденции в уровнях ряда. Его абсолютное значение говорит о том, что средний за квартал абсолютный прирост объема продаж составляет 2,26 у.е. Так как фактическое значение t-статистики Стьюдента больше 2,2, можно утверждать, что существование в уровнях ряда тенденции установлено надежно.

Коэффициент детерминации в данной модели R^2 = 0,997, что говорит о том, что вариация влияющих переменных (времени и сезонных колебаний) на 99,7 % объясняет вариацию исследуемого показателя y. Среднеквадратическое отклонение остатков составляет 4,511 (значение получено с помощью встроенной функции СТАНДОТКЛОН.Г). Если использовать предыдущий метод построения, то по мультипликативной модели будет получено значение 4,815, а по аддитивной – 4,56. Следовательно, в этом случае модель с фиктивными переменными описывает динамику продаж лучше, чем мультипликативная или аддитивная модели.

Основной недостаток модели с фиктивными переменными для описания сезонных колебаний – наличие большого количества переменных. Если строить, например, модель для помесячных периодических колебаний за несколько лет, то такая модель будет включать 11 фиктивных переменных и фактор времени, итого 12 переменных. В такой ситуации число степеней свободы невелико, что снижает вероятность получения статистически значимых оценок параметров уравнения регрессии.

2.7. Модели с распределенным лагом

2.7.1. Общая характеристика моделей с распределенным лагом

При исследовании экономических процессов нередко приходится моделировать ситуации, когда значение результативного признака в текущий момент времени t формируется под воздействием ряда факторов, действовавших в прошлые моменты времени $t - 1$, $t - 2$, ..., $t - q$. Например, на выручку от реализации или прибыль компании текущего периода могут оказывать влияние расходы на рекламу или проведение маркетинговых исследований, сделанные компанией в предшествующие моменты времени. Величину q, характеризующую запаздывание в воздействии фактора на результат, в эконометрике назы-

вают *лагом,* а временные ряды самих факторных переменных, сдвинутые на один или более моментов времени, – *лаговыми переменными.*

Разработка экономической политики как на макро-, так и на микроуровне требует решения обратного типа задач, т. е. задач, определяющих, какое воздействие окажут значения управляемых переменных текущего периода на будущие значения экономических показателей. Например, как повлияют инвестиции в промышленность на валовую добавленную стоимость этой отрасли экономики будущих периодов или как может измениться объем ВВП, произведенного в периоде t + 1, под воздействием увеличения денежной массы в периоде t?

Эконометрическое моделирование охарактеризованных выше процессов осуществляется с применением моделей, содержащих не только текущие, но и лаговые значения факторных переменных. Эти модели называются моделями с распределенным лагом (DL – distributed lags). Модель вида

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + b_2 \cdot x_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad (2.71)$$

является примером модели с распределенным лагом – DL(2).

Наряду с лаговыми значениями независимых, или факторных, переменных на величину зависимой переменной текущего периода могут оказывать влияние ее значения в прошлые моменты или периоды времени. Например, потребление в момент времени t формируется под воздействием дохода текущего и предыдущего периодов, а также объема потребления прошлых периодов, например потребления в период t – 1. Эти процессы обычно описывают с помощью моделей регрессии, содержащих в качестве факторов лаговые значения зависимой переменной, которые называются моделями авторегрессии с распределенным лагом (ADL). Модель вида

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + c_1 \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (2.72)$$

является примером такой модели – ADL(1,1).

Построение моделей с распределенным лагом имеет свою специфику. Во-первых, оценка параметров моделей в большинстве моделей с распределенным лагом не может быть проведена с помощью обычного МНК ввиду нарушения его предпосылок и требует специальных статистических методов. Во-вторых, исследователям приходится решать проблемы выбора оптимальной величины лага и определения его структуры.

Интерпретация параметров моделей с распределенным лагом

Рассмотрим модель с распределенным лагом в ее общем виде в предположении, что максимальная величина лага конечна:

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \ldots + b_q \cdot x_{t-q} + \varepsilon_t, \qquad (2.73)$$

Данная модель говорит о том, что если в некоторый момент времени *t* происходит изменение независимой переменной *x*, то это изменение будет влиять на значения переменной *y* в течение *q* следующих моментов времени.

Коэффициент регрессии b0 при переменной x, характеризует среднее абсолютное изменение y, при изменении xt на 1 единицу своего измерения в некото-

рый фиксированный момент времени t, без учета воздействия лаговых значений фактора x. Этот коэффициент называют краткосрочным мультипликатором.

В момент (t + 1) совокупное воздействие факторной переменной xt на результат y, составит (b0 + b1) условных единиц, в момент (t + 2) это воздействие можно охарактеризовать суммой (b0 + b1 + b2) и т. д. Полученные таким образом суммы называют промежуточными мультипликаторами.

С учетом конечной величины лага можно сказать, что изменение переменной xt, в момент t на 1 у. е. приведет к общему изменению результата через q моментов времени на (b0 + b1 +... + bq) абсолютных единиц.

Введем следующее обозначение:

$$b_0 + b_1 + ... + b_q = b. \qquad (2.74)$$

Величину b называют долгосрочным мультипликатором, который показывает абсолютное изменение в долгосрочном периоде (t + q) результата y под влиянием изменения на 1 ед. фактора x.

Предположим

$$\beta_j = b_j / b,\ j = 0, 1,2,\ldots,q. \qquad (2.75)$$

Назовем полученные величины относительными коэффициентами модели с распределенным лагом. Если все коэффициенты bj имеют одинаковые знаки, то для любого j

$$0 < \beta_j < 1 \text{ и } \sum_{j=0} \beta_j = 1. \qquad (2.76)$$

В этом случае относительные коэффициенты βj являются весами для соответствующих коэффициентов bj. Каждый из них измеряет долю общего изменения результативного признака в момент времени (t + j).

Зная величины β_j, с помощью стандартных формул можно определить еще две важные характеристики модели: величину среднего и медианного лагов.

Средний лаг рассчитывается по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{q} = \sum_0^q j\beta_j \qquad (2.77)$$

и представляет собой средний период, в течение которого будет происходить изменение результата под воздействием изменения фактора в момент времени *t*. Небольшая величина среднего лага свидетельствует об относительно быстром реагировании результата на изменение фактора, тогда как высокое его значение говорит о том, что воздействие фактора на результат будет сказываться в течение длительного периода времени.

Медианный лаг – это величина лага, для которого

$$\sum_{j=0}^{q_{Me}} \beta_j \approx 0{,}5.$$

Это тот период времени, в течение которого с момента времени *t* будет реализована половина общего воздействия фактора на результат. Рассмотрим условный пример.

Пример 1. По результатам изучения зависимости объемов продаж компании в среднем за месяц от расходов на рекламу была получена следующая модель с распределенным лагом (млн р.):

$$y_t = -0{,}67 + 4{,}5 \cdot x_t + 3{,}0 \cdot x_{t-1} + 1{,}5 \cdot x_{t-2} + 0{,}5 \cdot x_{t-3}\ .$$

В данной модели краткосрочный мультипликатор равен 4,5. Это означает, что увеличение расходов на рекламу на 1 млн р. ведет в среднем к росту объема продаж компании на 4,5 млн р. в том же периоде. Под влиянием увеличения расходов на рекламу объем продаж компании возрастет в момент времени (t + 1) – на (4,5 + 3,0) = 7,5 млн р., (t + 2) – на (7,5 + 1,5) = 9,0 млн р. Наконец, долгосрочный мультипликатор для данной модели составит:

$$b = 4{,}5 + 3{,}0 + 1{,}5 + 0{,}5 = 9{,}5.$$

В долгосрочной перспективе (через 3 мес.) увеличение расходов на рекламу на 1 млн р. в настоящий момент времени приведет к общему росту объема продаж на 9,5 млн р.

Относительные коэффициенты в этой модели равны:

$$b_1 = 4{,}5/9{,}5 = 0{,}474;\ b_2 = 3{,}0/9{,}5 = 0{,}316;$$

$$b_3 = 1{,}5/9{,}5 = 0{,}158;\ b_4 = 0{,}5/9{,}5 = 0{,}053.$$

Следовательно, 47,4 % общего увеличения объема продаж, вызванного ростом затрат на рекламу, происходит в текущем моменте времени; 31,6 % – в момент (t + 1); 15,8 % – в момент (t + 2) и только 5,3 % этого увеличения приходится на момент времени (t + 3).

Средний лаг в данной модели определяется как

$$\bar{q} = 0 \cdot 0{,}474 + 1 \cdot 0{,}316 + 2 \cdot 0{,}158 + 3 \cdot 0{,}053 = 0{,}791 \text{ мес.}$$

Небольшая величина лага еще раз подтверждает, что большая часть эффекта роста затрат на рекламу проявляется сразу же. Медианный лаг в данном примере составляет чуть более 1 мес.

Изложенные выше приемы анализа параметров модели с распределенным лагом действительны только в предположении, что все коэффициенты при текущем и лаговых значениях исследуемого фактора имеют одинаковые знаки. Это предположение вполне оправданно с экономической точки зрения: воздействие одного и того же фактора на результат должно быть однонаправленным независимо от того, с каким временным лагом измеряется сила или теснота связи между этими признаками. Однако на практике получить статистически значимую модель, параметры которой имели бы одинаковые знаки, особенно при большой величине лага q, чрезвычайно сложно.

Применение обычного МНК к таким моделям в большинстве случаев затруднительно по следующим причинам.

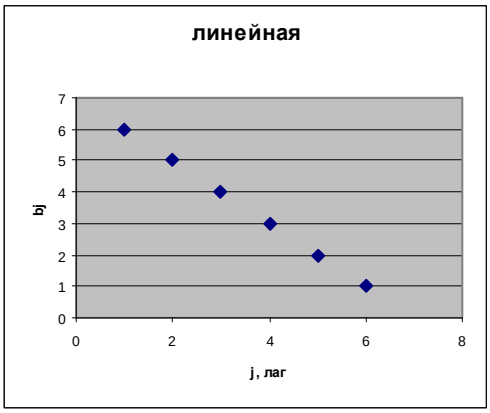
Во-первых, текущие и лаговые значения независимой переменной, как правило, тесно связаны друг с другом. Тем самым оценка параметров модели проводится в условиях высокой мультиколлинеарности факторов.

Во-вторых, при большой величине лага снижается число наблюдений, по которому строится модель, и увеличивается число ее факторных признаков, что ведет к потере числа степеней свободы в модели.

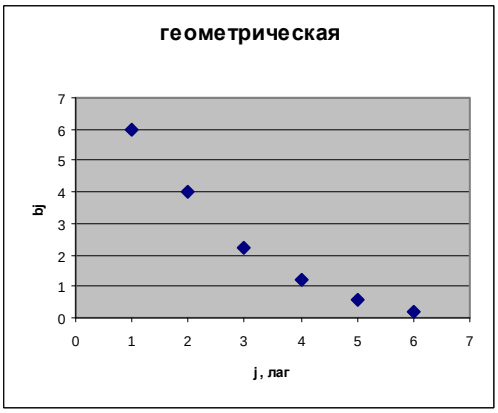
В-третьих, в моделях с распределенным лагом часто возникает проблема автокорреляции остатков. Вышеуказанные обстоятельства приводят к значительной неопределенности относительно оценок параметров модели, снижению их точности и получению неэффективных оценок. Чистое влияние факторов на результат в таких условиях выявить невозможно. Поэтому на практике параметры моделей с распределенным лагом учитывают определенные ограничения на коэффициенты регрессии и условия выбранной структуры лага.

Изучение структуры лага и выбора вида модели с распределенным лагом

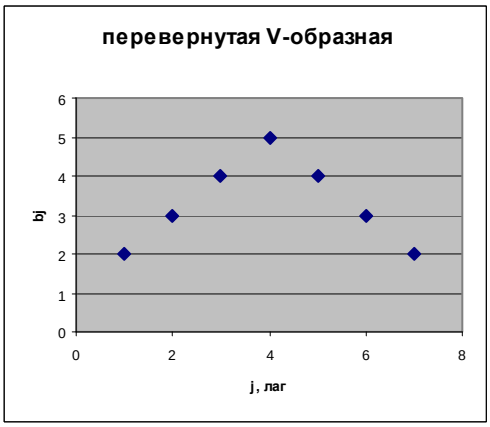
Текущие и лаговые значения факторной переменной оказывают различное по силе воздействие на результативную переменную модели. Количественно сила связи между результатом и значениями факторной переменной, относящимися к различным моментам времени, измеряется с помощью коэффициентов регрессии при факторных переменных. Если построить график зависимости этих коэффициентов от величины лага, можно получить графическое изображение структуры лага, или распределения во времени воздействия факторной переменной на результат. Структура лага может быть различной (рис. 2.8).



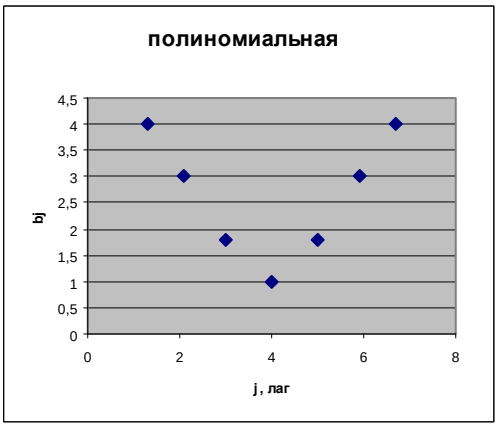
а



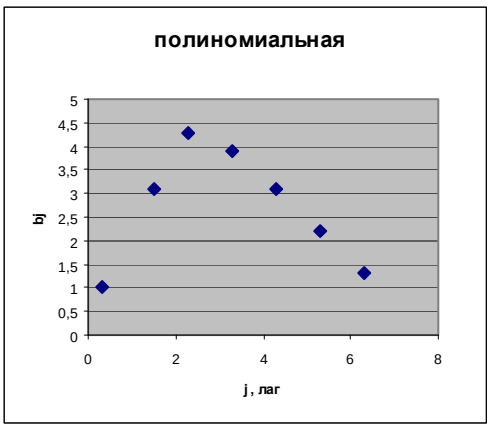
б

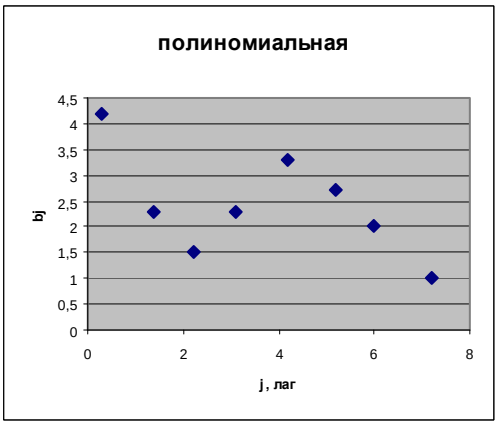


в



г





д е

Рис. 2.8. Основные формы структуры лага:
а – линейная; *б* – геометрическая; *в* – перевернутая V-образная;
г – е – полиномиальная

Если с ростом величины лага коэффициенты при лаговых значениях переменной убывают во времени, то имеет место линейная (ее называют также треугольной – рис. 2.8а) или геометрическая структура лага (рис. 2.8б). Если лаговые воздействия фактора на результат не имеют тенденцию к убыванию во времени, то имеет место один из вариантов, показанных на рис. 2.8 в–е. Структуру лага (рис. 2.8в) называют «перевернутой» V-образной структурой. Основная ее особенность – симметричность лаговых воздействий относительно некоторого среднего лага, который характеризуется наиболее сильным воздействием фактора на результат. Графики, представленные на рис. 2.8 *г–е,* свидетельствуют о полиномиальной структуре лага.

Графический анализ структуры лага аналогичным образом можно проводить и с помощью относительных коэффициентов регрессии βj. Основная трудность в выявлении структуры лага состоит в том, как получить значения параметров bj (или βj). Обычный МНК редко бывает полезным в этих целях. Поэтому в большинстве случаев предположения о структуре лага основаны на общих положениях экономической теории, на исследованиях взаимосвязи показателей либо на результатах проведенных ранее эмпирических исследований или иной априорной информации.

2.7.2. Лаги Алмон

Рассмотрим общую модель с распределенным лагом, имеющую конечную максимальную величину лага q, которая описывается соотношением

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \ldots + b_p \cdot x_{t-q} + \varepsilon_t. \qquad (2.78)$$

Предположим, было установлено, что в исследуемой модели имеет место полиномиальная структура лага, т. е. зависимость коэффициентов регрессии b_j от величины лага описывается полиномом *k*-ой степени. Частным случаем полиномиальной структуры лага является линейная модель (рис.1*а)*. Примерами

лагов, образующих полином 2-й степени, являются варианты рис.1 *г* и *д*. Перевернутая V-образная структура лага также может быть аппроксимирована с помощью полинома 1-й степени. Наконец, график, представленный на рис.1*е,* является примером модели лагов в форме полинома 3-й степени. Лаги, структуру которых можно описать с помощью полиномов, называют также лагами Алмон, по имени Ш. Алмон, впервые обратившей внимание на такое представление лагов.

Формально модель зависимости коэффициентов bj от величины лага j в форме полинома можно записать в следующем виде:

– для полинома 1-й степени: $b_j = c_0 + c_1 j$;
– для полинома 2-й степени: $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2$;
– для полинома 3-й степени: $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + c_3 j^3$ и т. д.

В общем виде для полинома *k*–й степени имеем:

$$bj = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + ... + c_k j^k. \qquad (2.79)$$

Тогда каждый из коэффициентов bj модели (2.78) можно выразить следующим образом:

$$b_0 = c_0;$$

$$b_1 = c_0 + c_1 + \ldots + c_k;$$

$$b_2 = c_0 + 2\, c_1 + 4c_2 + \ldots + 2^k c_k;$$

$$b_3 = c_0 + 3\, c_1 + 9c_2 + \ldots + 3^k c_k;$$

$$\ldots\ldots$$

$$b_q = c_0 + q\, c_1 + q^2 c_2 + \ldots + q^k c_k\,. \qquad (2.80)$$

Подставив в $y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \ldots + b_q x_{t-q} + \varepsilon_t$ найденные соотношения для *bj* (в данной модели предполагается, что степень полинома *k* меньше максимальной величины лага *q*), получим:

$$y_t = a + c_0 \bullet x_t + (c_0 + c_1 + ... + c_к) \bullet x_{t-1} + (c_0 + 2 \bullet c_1 + 4 \bullet c_2 + ...+ + 2^k \bullet c_к) \bullet x_{t-2} + +(c_0 + 3 \bullet c_1 + 9 \bullet c_2 + \ldots + 3^k \bullet c_k) \bullet x_{t-3} + ...+ (c_0 + q \bullet c_1 + q^2 \bullet c_2 + \ldots + q^k \bullet c_k) \bullet x_{t-q} + +\varepsilon_t.$$

Перегруппируем слагаемые:

$$y_t = a + c_0 \bullet (x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + ...+ x_{t-q}) + c_1 \bullet (x_{t-1} + 2 \bullet x_{t-2} + 3 \bullet x_{t-3} + ...+ q \bullet x_{t-q}) + c_2 \bullet (x_{t-1} + 4 \bullet x_{t-2} + 9 \bullet x_{t-3} + ...+ q^2 \bullet x_{t-q}) + \ldots + c_k (x_{t-1} + 2^k \bullet x_{t-2} + 3^k \bullet x_{t-3} + \ldots + q^k \bullet x_{t-q}) + + \varepsilon_t. \qquad (2.81)$$

Обозначим слагаемые в скобках при c_k как новые переменные:

$$z_0 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + ... + x_{t-q} = \sum_{j=0}^{q} x_{t-j};$$

$$z_1 = x_{t-1} + 2 \bullet x_{t-2} + 3 \bullet x_{t-3} + ...+ q \bullet x_{t-q} = \sum_{j=1}^{q} j \bullet x_{t-j};$$

$$z_2 = x_{t-1} + 4 \bullet x_{t-2} + 9 \bullet x_{t-3} + ...+ q^2 \bullet x_{t-q} = \sum_{j=1}^{q} j^2 \bullet x_{t-j};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.82)$$

$$z_k = x_{t-1} + 2^k \bullet x_{t-2} + 3^k \bullet x_{t-3} + \ldots + q^k \bullet x_{t-q} = \sum_{j=1}^{q} j^k \bullet x_{t-j}.$$

Перепишем модель (2.81) с учетом соотношений (2.82):

$$y_t = a + c_0 \bullet z_0 + c_1 \bullet z_1 + c_2 \bullet z_2 + \ldots + c_k \bullet z_k + \varepsilon_t \,. \qquad (2.83)$$

Процедура применения метода Алмон для расчета параметров модели с распределенным лагом выглядит следующим образом.

1. Определяется максимальная величина лага q.

2. Определяется степень полинома k, описывающего структуру лага.

3. По соотношениям (2.82) рассчитываются значения переменных $z_0, \ldots, z_k$.

4. Определяются параметры уравнения линейной регрессии (2.83).

5. С помощью соотношений (2.80) рассчитываются параметры исходной модели с распределенным лагом.

Применение метода Алмон сопряжено с рядом проблем.

Во-первых, величина лага q должна быть известна заранее. При ее определении лучше исходить из максимально возможного лага, чем ограничиваться лагами небольшой длины. Выбор меньшего лага, чем его реальное значение, приведет к тому, что в модели регрессии не будет учтен фактор, оказывающий значительное влияние на результат, т. е. к неверной спецификации модели. Влияние этого фактора в такой модели будет выражено в остатках. Тем самым в модели не будут соблюдаться предпосылки МНК о случайности остатков, а полученные оценки ее параметров окажутся неэффективными и смещенными. Выбор большей величины лага по сравнению с ее реальным значением будет означать включение в модель статистически незначимого фактора и снижение эффективности полученных оценок, однако эти оценки все же будут несмещенными.

Существует несколько практических подходов к определению реальной величины лага, например построение нескольких уравнений регрессии и выбор наилучшего из этих уравнений или применение формальных критериев, например критерия Шварца. Однако наиболее простым способом является измерение тесноты связи между результатом и лаговыми значениями фактора. Кроме того, оптимальную величину лага можно приближенно определить на основе априорной информации экономической теории или проведенных ранее эмпирических исследований.

Во-вторых, необходимо установить степень полинома k. Обычно на практике ограничиваются рассмотрением полиномов 2-й и 3-й степени, применяя следующее простое правило: выбранная степень полинома k должна быть на единицу больше числа экстремумов в структуре лага. Если априорную информацию о структуре лага получить невозможно, величину k проще всего определить путем сравнения моделей, построенных для различных значений k, и выбора наилучшей модели.

В-третьих, переменные z, которые рассчитываются как линейные комбинации исходных переменных x, будут коррелировать между собой в случаях, когда наблюдается высокая связь между самими исходными переменными. Поэтому оценку параметров модели (2.83) приходится проводить в условиях

мультиколлинеарности факторов. Однако мультккoллинеарность факторов z0,…, zk в модели (2.83) сказывается на оценках параметров b0,…, bl несколько меньшей степени, чем если бы эти оценки были получены путем применения обычного МНК непосредственно к модели (2.83) в условиях мультиколлинеарности факторов xt,…, xt-l. Это связано с тем, что в модели (2.83) мультиколлинеарность ведет к снижению эффективности оценок c0,..., ck, поэтому каждый из параметров b0,…, bl, которые определяются как линейные комбинации оценок c0,..., ck, будет представлять собой более точную оценку, а стандартные ошибки этих параметров не будут превышать стандартные ошибки параметров, полученных по модели (2.78) обычным МНК.

Метод Алмон имеет два неоспоримых преимущества.

Он достаточно универсален и может быть применен для моделирования процессов, которые характеризуются разнообразными структурами лагов.

При относительно небольшом количестве переменных в (2.83) (обычно выбирают k = 2 или k = 3), которое не приводит к потере значительного числа степеней свободы, с помощью метода Алмон можно построить модели с распределенным лагом любой длины.

2.7.3. Метод Койка

По-видимому, величина q для экономических систем является конечной. Однако, как показывает опыт исследования систем с распределенным лагом, рассмотрение модели q = ∞ позволяет построить достаточно эффективные методы оценивания yt и получить важные практические результаты.

Предположим теперь, что для описания некоторого процесса используется модель с бесконечным лагом вида:

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + b_2 \cdot x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t. \qquad (2.84)$$

Очевидно, что параметры такой модели обычным МНК или с помощью иных стандартных статистических методов определить нельзя, поскольку модель включает бесконечное число факторных переменных. Однако, приняв определенные допущения относительно структуры лага, оценки ее параметров все же можно получить. Эти допущения состоят в наличии геометрической структуры лага, т. е. такой структуры, когда воздействия лаговых значений фактора на результат уменьшаются с увеличением величины лага в геометрической профессии. На рис. 2.8 геометрической структуре лага соответствует вариант *б.*

Впервые изложенный в этом разделе подход к оценке параметров моделей с распределенным лагом типа (2.84) был предложен Л.М. Койком. Он предположил, что существует некоторый постоянный темп λ (0 < λ < 1) уменьшения во времени лаговых воздействий фактора на результат. Если, например, в период t результат изменялся под воздействием изменения фактора в этот же период времени на b_0 ед., то под воздействием изменения фактора, имевшего место в период (t – 1), результат изменится на $b_0 \bullet \lambda$ ед.; в период (t - 2) – на $b_0 \bullet \lambda \bullet \lambda = b_0 \bullet \lambda^2$ ед., и т. д. Для некоторого периода *(t - q)* это изменение результата составит $b_0 \bullet \lambda^q$ ед. В более общем виде можно записать:

$$b_j = b_0 \bullet \lambda^j;\ j = 0, 1, 2, \ldots, 0 < \lambda < 1. \qquad (2.85)$$

Ограничение на значения $\lambda > 0$ обеспечивает одинаковые знаки для всех коэффициентов $b_j > 0$, а ограничение $\lambda < 1$ означает, что с увеличением лага значения параметров модели (2.84) убывают в геометрической прогрессии. Чем ближе λ к 0, тем выше темп снижения воздействия фактора на результат во времени и тем большая доля воздействия на результат приходится на текущие значения фактора x_t.

Выразим с помощью формулы (2.85) все коэффициенты b_j в модели (2.84) через b_0 и λ:

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_0 \cdot \lambda \cdot x_{t-1} + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t\ . \qquad (2.86)$$

Тогда для периода (t - 1) модель (2.86) можно записать следующим образом:

$$y_{t-1} = a + b_0 \bullet x_{t-1} + b_0 \bullet \lambda \bullet x_{t-2} + b_0 \bullet \lambda^2 \bullet x_{t-3} + \ldots + \varepsilon_{t-1}\ . \qquad (2.87)$$

Умножим обе части модели (2.87) на λ:

$$\lambda \bullet y_{t-1} = \lambda \bullet a + b_0 \bullet \lambda \bullet x_{t-1} + b_0 \bullet \lambda^2 \bullet x_{t-2} + b_0 \bullet \lambda^3 \bullet x_{t-3} + \ldots + \lambda \bullet \varepsilon_{t-1}. \qquad (2.88)$$

Вычтем найденное соотношение (2.88) из соотношения (2.86):

$$y_t - \lambda \bullet y_{t-1} = a - \lambda \bullet a + b_0 \bullet x_t + \varepsilon_{t-1} - \lambda \bullet \varepsilon_{t-1}. \qquad (2.89)$$

Преобразования (2.88) приводят нас к получению **модели Койка:**

$$y_t = a \bullet (1 - \lambda) + b_0 \bullet x_t + (1 - \lambda) \bullet y_{t-1} + u_t, \qquad (2.90)$$

где $u_t = \varepsilon_t - \lambda \bullet \varepsilon_{t-1}$.

Полученная модель – модель двухфакторной линейной регрессии (точнее – авторегрессии). Определив ее параметры, мы найдем λ, и оценки параметров a и b_0 исходной модели. Далее с помощью соотношений (2.85) несложно определить параметры b_1, b_2, ... модели (2.84). Отметим, что применение обычного МНК к оценке параметров модели (2.90) приведет к получению смещенных оценок ее параметров ввиду наличия в этой модели в качестве фактора лаговой результативной переменной y_{t-1} .

Описанный выше алгоритм получил название «преобразования Койка». Это преобразование позволяет перейти от модели с бесконечными распределенными лагами к модели ADL, содержащей две независимые переменные x_t и y_{t-1}:

$$y_t = a + b_0 \bullet x_t + c_1 \bullet y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Несмотря на бесконечное число лаговых переменных в модели (2.84), геометрическая структура лага позволяет определить величины среднего и медианного лагов в модели Койка. Поскольку сумма коэффициентов регрессии в модели (2.84) есть сумма геометрической прогрессии, т. е.

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j = b_0 + b_0 \bullet \lambda + b_0 \bullet \lambda^2 + b_0 \bullet \lambda^3 + \ldots = b_0 \bullet (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots) =$$

$$= b_0 \bullet \frac{1}{1 - \lambda}, \ (2.91)$$

то средний лаг определяется как

$$\bar{q} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot b_j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \frac{b_0 \cdot \lambda \cdot \left(1 + 2 \cdot \lambda^2 + 3 \cdot \lambda^3 + \ldots\right)}{b_0 \cdot \frac{1}{1-\lambda}} = \frac{b_0 \cdot \lambda \cdot \frac{1}{(1-\lambda)^2}}{b_0 \cdot \frac{1}{1-\lambda}} = \frac{\lambda}{1-\lambda}. \quad (2.92)$$

Нетрудно заметить, что при λ = 0,5 средний лаг $\bar{l}$ = 1, а при l < 0,5 средний лаг $\bar{l}$ < 1, т. е. воздействие фактора на результат в среднем занимает менее одного периода времени. Величину (1–λ) интерпретируют обычно как скорость, с которой происходит адаптация результата во времени к изменению факторного признака. Для расчета медианного лага необходимо выполнение следующего условия:

$$\sum_{j=0}^{q_{Me}-1} \beta_j = \sum_{j=0}^{q_{Me}-1} \frac{b_j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \sum_{j=0}^{q_{Me}-1} \frac{b_0 \cdot \lambda^j}{b_0 \cdot \frac{1}{1-\lambda}} = \sum_{j=0}^{q_{Me}-1} \lambda^j \cdot (1-\lambda) = 0{,}5 \quad (2.93)$$

Поэтому медианный лаг в модели Койка равен:

$$q_{Me} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln \lambda} \quad (2.94)$$

Пример 2. Построение модели Койка.

Исследуя взаимосвязь реальной заработной платы и уровня безработицы, Дж. Сакс и М. Бруно использовали следующую модель:

$$U_t = \delta_0 + \delta_1 \cdot U_{t-1} + \delta_2 \cdot t + \delta_3 \cdot w_t + \varepsilon_t,$$

где U_t, U_{t-1} – уровень безработицы в периоды t и t – 1, соответственно;

w_t – превышение реальной заработной платы над ее уровнем в условиях полной занятости;

t – время;

δ_0, δ_1, δ_2, δ_3– параметры модели;

ε_t – ошибка.

Значения переменной wt были получены расчетным путем. Для экономики Канады по данным за 1961-1981 гг. авторы получили следующее уравнение регрессии:

$$U_t = \delta_0 + 0{,}63 \cdot U_{t-1} + 0{,}07 \cdot t + 15{,}72 \cdot w_t,\ R^2 = 0{,}85.$$

t -критерий (5,46) (2,82) (2,23)

Переменная wt в этой модели является одним из факторов, определяющих спрос на труд. Если предположить, что переменная wt оказывает влияние на уровень безработицы с бесконечным временным лагом в условиях геометрической структуры лага, то в соответствии с методом Койка мы получим следующую модель с распределенным лагом:

$$U_t = a + b_0 \cdot w_t + b_0 \cdot \lambda \cdot w_{t-1} + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot w_{t-2} + \ldots + c \cdot t + \varepsilon_t.$$

Данная модель отличается от модели (2.84) тем, что, помимо текущего и лаговых значений факторного признака, она учитывает фактор времени t. Проведя алгебраические преобразования в соответствии с методом Койка, нетрудно убедиться, что эта модель сводится к следующей модели авторегрессии:

$$U_t = (a \cdot (1-\lambda) + \lambda \cdot c) + (1-\lambda) \cdot U_{t-1} + c \cdot (1-\lambda) \cdot t + b_0 \cdot w_t + u_t,$$

В модели Сакса и Бруно λ=0,63.

Рассчитаем параметры модели Койка:

$$c = 0{,}07/(1-0{,}63) = 0{,}189;$$

$$a = \delta_0/(1-0{,}63) + 0{,}189 \bullet 0{,}63 = 0{,}119 + 2{,}703 \bullet \delta_0;$$

$$b_0 = 15{,}72;$$

$$b_1 = 15{,}72 \cdot 0{,}63 = 9{,}904;$$

$$b_2 = 15{,}72 \cdot (0{,}63)^2 = 6{,}239;$$

$$b_3 = 15{,}72 \cdot (0{,}63)^3 = 3{,}931 \text{ и т.д.}$$

Модель Койка имеет следующий вид:

$$\hat{U}_t = (0{,}119 + 2{,}703 \bullet \delta_0) + 15{,}72 \bullet w_t + 9{,}904 \bullet w_{t-1} + 6{,}239 \bullet w_{t-2} + + 3{,}931 \bullet w_{t-3} + \ldots + 0{,}189t.$$

Средний лаг в этой модели составит:

$$\bar{q} = 0{,}63/(1-0{,}63) = 1{,}703.$$

Величину медианного лага в соответствии с формулой (2.94) можно определить как

$$q_{Me} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}63} = \frac{-0{,}69314}{-0{,}46203} = 1{,}500203.$$

Таким образом, в среднем воздействие разница между реальной: заработной платой в экономике Канады и ее величиной в условиях полной занятости проявляется в течение относительно короткого промежутка времени – 1,7 года, причем половина этого воздействия реализуется в течение первых 1,5 лет с момента изменения wt.

3. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

3.1. Экспоненциальное сглаживание

При анализе временных рядов использовался метод скользящей средней, где все данные (и поздние, и ранние) были равноправны. Метод скользящей средней имеет как преимущества, так и недостатки. Этот метод прост, легко применим, дает близкую к действительности картину долговременных изменений, но требует существования относительно стабильной периодичности временного ряда.

Минимальная информация, необходимая для построения прогноза по методу скользящей средней, легко доступна (либо на предприятии, либо из посторонних источников).

Анализ временных рядов методом скользящей средней используется, как правило, в краткосрочном прогнозировании.

При недостатке данных (например, нет информации о продажах нового продукта) метод скользящей средней бесполезен. Да и проекция на будущее старых схем не всегда оказывается оправданной. Невозможность учета влияния случайных факторов – это еще один недостаток метода скользящей средней.

Более правильным представляется способ, в котором данным приписываются веса; более поздним данным придается больший вес, чем более ранним. Этот метод обеспечивает быстрое получение прогноза на один период вперед и автоматически корректирует любой прогноз в свете различий между фактическим и спрогнозированным результатом.

3.1.1. Простая модель экспоненциального сглаживания

Новый прогноз = a · (фактический результат в последний период) + (1 – a) · (прогноз в последний период), то есть $F_{t+1} = aA_t + (1 - a)F_t$. Константу сглаживания a исследователь выбирает из отрезка [0, 1]. В условиях стабильности часто a принадлежит отрезку [0,2; 0,4].

Чем ближе значение a к 0, тем медленнее прогноз приспосабливается к ошибкам прогноза и тем больше степень сглаживания. Чем ближе значение a к 1, тем выше чувствительность прогноза и меньше сглаживание.

Обычно константу сглаживания подбирают методом проб и ошибок. При этом прогноз должен быть достаточно чувствительным к реальным изменениям данных временного ряда и хорошо сглаживать скачки, вызванные сезонными факторами.

Пример. В табл. 3.1 указан объем продаж (тыс.руб.) за последние 11 кварталов. Дать на основании этих данных прогноз объема продаж на следующие два квартала.

Таблица 3.1

Исходные данные

Квартал	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Объем продаж	4	6	4	5	10	8	7	9	12	14	15

Пусть a = 0,8. Тогда 1 – a = 1 – 0,8 = 0,2. Предположим, что на первый квартал был дан прогноз 3. Дадим прогноз на 12-й квартал.

Заполним таблицу 3.2.

$F_{t+1} = aA_t + (1–a)F_t = 0,8A_t + 0,2F_t$, то есть числа в каждой строке умножаем соответственно на 0,8 и 0,2 и результат пишем в следующей строке во втором столбце.

0,8 ·4 + 0,2 ·3 = 3,8.

0,8 ·6 + 0,2 ·3,8 = 5,6. И т. д.

Результат округляем до одной цифры после запятой.

Таблица 3.2

Расчетная таблица

A_t (фактически)	F_t (прогноз)
4	3
6	3,8
4	5,6
5	4,3
10	4,9
8	9
7	8,2
9	7,2
12	8,6
14	11,3
15	13,5
	14,7

Прогноз на 12-й квартал – 14,7 тыс. р.

3.1.2. Экспоненциальное сглаживание с поправкой на тренд

Простая модель экспоненциального сглаживания используется только тогда, когда все данные группируются вокруг некоторого среднего значения или имеют скачкообразные изменения.

Если же временной ряд выявляет тенденцию, то все прогнозы с использованием простой модели экспоненциального сглаживания будут запаздывать по

отношению к тенденции. Например, при увеличении данных каждый прогноз будет занижен. В этом случае используют экспоненциальное сглаживание с поправкой на тренд.

Даем прогноз методом простого экспоненциального сглаживания, а затем корректируем его с учетом тренда по следующей формуле:

прогноз с учетом тренда FIT_t = прогноз F_t + тренд T_t.

Тренд $T_t = (1 - b)T_{t-1} + b(F_t - F_{t-1})$, где T_t и T_{t-1} – сглаженный тренд в периоды t и t–1 соответственно, b – выбранная константа сглаживания.

Начальное значение тренда может быть получено на основе предположения.

Пример. По исходным данным в предыдущем примере дадим прогноз объема продаж на 12-й квартал методом экспоненциального сглаживания с поправкой на тренд. Возьмем b = 0,4, $T_t = 0$.

Заполним таблицу.

Из каждого числа 1-го столбца вычитаем предыдущее число 1-го столбца и результат запишем во 2-й столбец.

Каждое число 3-го столбца есть сумма числа, умноженного на 1 – b = 1 – 0,4 = 0,6, из предыдущей строки 3-го столбца и числа, умноженного на b = 0,4, из этой же строки 2-го столбца. Результат округляем до одной цифры после запятой (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Расчетная таблица

F_t	$F_t - F_{t-1}$	T_t	$FIT_t = F_t + T_t$
3	–	0	3
3,8	0,8	0,3	4,1
5,6	1,8	0,9	6,5
4,3	–1,3	0,0	4,3
4,9	0,6	0,3	5,2
9	4,1	1,8	10,8
8,2	–0,8	0,8	9,0
7,2	–1	0,1	7,3
8,6	1,4	0,6	9,2
11,3	2,7	1,4	12,7
13,5	2,2	1,7	15,2
14,7	1,2	1,5	16,2

Прогноз на 12-й квартал – 16,2 тыс. р.

3.2. Имитационное моделирование

Рассмотрим одно из направлений имитационного моделирования. Моделируется некоторая случайная величина. Сначала из опытных данных определяются частоты появления возможных значений этой величины. По частотам вычисляются вероятности, по вероятностям – кумулятивные вероятности. Зная

кумулятивные вероятности, устанавливаем соответствие между случайными числами и значениями случайной величины. Берем несколько случайных чисел из специальной таблицы, восстанавливаем по ним значения случайной величины и определяем нужные нам характеристики.

Пример. Известно количество машин, приезжавших на мойку автомашин в течение последних 200 часов (табл. 3.4).

Таблица 3.4

Исходные данные

Число машин в час	Частота
4	20
5	30
6	50
7	60
8	40

Будем имитировать прибытие машин в течение 10 часов. Заполним табл. 3.5.

Таблица 3.5

Расчетная таблица

Число машин в час	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
4	20	0,10	0,10	00–09
5	30	0,15	0,25	10–24
6	50	0,25	0,50	25–49
7	60	0,30	0,80	50–79
8	40	0,20	1,00	80–99
Сумма	200			

Поясним, как заполняется таблица.

Частота была получена статистическим наблюдением. Вероятность определяется как доля частоты конкретного явления (например, появления в течение часа 4 машин) в общей сумме частот. Кумулятивная вероятность – накопленная частота, определяется нарастающим итогом. Так как у чисел в столбце «Кумулятивная вероятность» после запятой меняются 2 знака, то случайные числа группируем по два. Заполняется последний столбец сверху вниз. Берем числа после запятой из 1-й строки 4-го столбца. Это 10. Поэтому с 10 начнем 2-ю строку последнего столбца, а числом 10 – 1 = 09 завершим 1-ю строку. Начинаем же 1-ю строку с 00. Берем числа после запятой из 2-й строки 4-го столбца. Это 25. Поэтому с 25 начнем 3-ю строку последнего столбца, а числом 25 – 1 = 24 завершим 2-ю строку. И т. д.

Полученная таблица используется следующим образом. Берем подряд из любой строки или любого столбца случайные числа из таблицы случайных чи-

сел. Определяем, в какой интервал нашей таблицы они попадают, и находим соответствующие значения в 1-м столбце (табл. 3.6).

Таблица 3.6

Расчетная таблица

Час	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайное число	69	02	36	49	71	99	32	10	75	21
Прибыло машин	7	4	6	6	7	8	6	5	7	5

69 попадает в интервал 50–79, что соответствует 7 машинам, 02 попадает в интервал 00–09, что соответствует 4 машинам, и т. д.

Замечание. Математическая функция СЛЧИС мастера формул f_x пакета Excel возвращает случайное число: f_x –> математические –> СЛЧИС –> ОК. У этой функции нет аргументов. ОК. После этого в ячейке появится десятичная дробь из интервала (0, 1). Исследователь берет нужное число знаков после запятой. После нажатия клавиши F9 десятичная дробь в ячейке изменится.

3.2.1. Применение имитационных моделей в теории управления запасами

Пример. Начальный запас – 10 единиц, стоимость подачи заказов C_0 = 10 рублей/заказ, стоимость хранения C_h = 5 рублей/единицу в день, одна упущенная продажа C_b = 80 рублей. При наличии на складе не более 5 единиц подается заказ на 10 единиц. Считаем, что все заказы подаются и выполняются в начале рабочего дня.

Таблица 3.7

Исходные данные по спросу

Спрос в день	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
0	15	0,05	0,05	00–04
1	30	0,10	0,15	05–14
2	60	0,20	0,35	15–34
3	120	0,40	0,75	35–74
4	45	0,15	0,90	75–89
5	30	0,10	1,00	90–99
Сумма	300			

Таблица 3.8

Исходные данные по времени выполнения заказа

Время выполнения заказа, дни	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
1	10	0,2	0,2	0–1
2	25	0,5	0,7	2–6
3	15	0,3	1,0	7–9
Сумма	50			

Во второй таблице сгруппируем случайные числа по одному, так как после запятой в столбце «Кумулятивная вероятность» меняется только 1 знак. Оценим общие издержки за день. Смоделируем работу склада за 10 дней.

Таблица 3.9

Расчетная таблица

День	Запас в начале дня	Случайное число	Спрос	Запас на конец дня	Повторный заказ да/нет	Случайное число	Время выполнения	Дефицит
1	10	06	1	9				
2	9	63	3	6				
3	6	57	3	3				
4	3	94	5	0	да	0	1	2
5	10	52	3	7				
6	7	69	3	4				
7	4	32	2	2	да	2	2	
8	2	30	2	0				
9	10	48	3	7				
10	7	88	4	3				
Сумма				41				2

Начальный запас – 10 единиц. Случайное число для спроса в 1-й день – 06, что соответствует по таблице спросу 1. Поэтому запас на конец 1-го дня равен 10–1 = 9. Это число и запишем в запас на начало 2-го дня.

Случайное число для спроса во 2-й день – 63, что соответствует по таблице спросу 3. Поэтому запас на конец 2-го дня равен 9 – 3 = 6. Это число и запишем в запас на начало 3-го дня.

Запас на начало 4-го дня – 3 < 5. Поэтому подаем заказ (да). Случайное число – 0, что соответствует по таблице времени выполнения заказа 1 день, то есть заказ выполняется весь 4-й день, и в начале 5-го дня мы получим 10 единиц. Спрос в 4-й день был 5 единиц, а начальный запас 3. Поэтому 5 – 3 = 2 упущенные продажи запишем в столбец «Дефицит».

Запас на начало 7-го дня – 4 < 5. Поэтому подаем заказ (да). Случайное число – 2, что соответствует по таблице времени выполнения заказа 2 дня, то есть заказ выполняется в течение 7-го и 8-го дней, и в начале 9-го дня мы получим 10 единиц.

Средний запас = суммарный конечный запас/общее число дней = 41/10 = 4,1 единицы/день.

Среднее число упущенных продаж = общее число упущенных продаж/общее число дней = 2/10 = 0,2 продажи/день.

Среднее число заказов = общее число заказов/общее число дней = 2/10 = 0,2 заказа/день.

Общие издержки = подача заказов + хранение + штраф за дефицит = C_0 · (среднее число заказов) + C_h ·(средний запас) + C_b ·(среднее число упущенных продаж) = 10 ·0,2 + 5 ·4,1 + 80 ·0,2 = 38,5 рублей/день.

3.2.2. Особенности применения имитационного моделирования

Имитационное моделирование не является методом оптимизации, не выдает никакого решения, но позволяет исследователю проверить решение на модели, достаточно точно воспроизводящей реальный процесс. Исследователю предоставляется возможность поэкспериментировать с альтернативными решениями («а что, если...»).

В ситуациях, слишком сложных для математического описания, имитационное моделирование позволяет провести анализ без чрезмерных упрощений.

Проведение испытаний реально действующего процесса неизбежно связано с риском. Имитационное моделирование позволяет избежать этого риска. Ведь использование моделей не несет в себе каких-то существенных рисков.

Имитационное моделирование обеспечивает учет неопределенности. Никто точно не знает будущего спроса, времени поставки, изменения процентных ставок, цен конкурентов, интенсивности потока покупателей и т. д. И здесь на помощь приходит имитационное моделирование.

Имитационное моделирование обеспечивает непротиворечивость данных. Без имитационной модели легко впасть в субъективизм при проведении сравнений.

Но имитационное моделирование показывает лишь приблизительное поведение системы при заданных условиях. Ведь модель – это только приближение к действительности. Да и фактор случайности (случайные числа) всегда присутствует в модели.

Разработка сложных имитационных моделей может отнять много времени и средств. На практике лучше ограничиться упрощенным вариантом модели.

Обычно исследователь не сразу обращается к имитационному моделированию. В простых случаях можно ограничиться интуитивными соображениями. В более сложных ситуациях предпочтительнее аналитические методы. Если же подходящих аналитических методов нет (или они очень громоздки), то в этой ситуации на помощь приходит имитационное моделирование.

3.3. Линейное программирование

Программирование – это процесс распределения ресурсов. Математическое программирование – это использование математических методов и моделей для решения проблем программирования. Если цель исследования и ограничения на ресурсы можно выразить количественно в виде линейных взаимосвязей между переменными, то соответствующий раздел математического программирования называется линейным программированием.

Для решения задач линейного программирования разработаны специальные методы: геометрический и симплекс-метод (метод модифицированных жордановых исключений). Мы рассмотрим решение задач линейного программирования с помощью пакета Excel.

Задача об использовании ресурсов

Пример. Предприятие производит два вида продукции *X* и *Y*. 1 кг *X* приносит прибыль 5 рублей, требует 2 кг ресурса А и 3 кг ресурса В. 1 кг *Y* приносит прибыль 10 рублей, требует 7 кг ресурса А и 9 кг ресурса В. Суммарный запас ресурсов 70 кг (А) и 50 кг (В). При каком объеме производства прибыль будет максимальна?

Пусть предприятие производит x кг продукции *X* и y кг продукции *Y*. Тогда общая прибыль $F = 5x + 10y$ (целевая функция). Мы хотим найти максимум целевой функции при ограничениях $2x + 7y \le 70$ (ресурс А) и $3x + 9y \le 50$ (ресурс В). Конечно, x, y $\ge$ 0. Получаем задачу линейного программирования: $F=5x + 10y \to max$ при ограничениях: $\begin{cases} 2x+7y \le 70 \\ 3x+9y \le 50 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

В Excel существует надстройка *Поиск решения (Solver),* которая, в частности, помогает решать задачи линейного программирования. Нужно воспользоваться меню *Сервис/Поиск решения*. Если в меню *Сервис* отсутствует команда Поиск решения, необходимо выполнить команду *Сервис/Надстройки*. Найти элемент *Поиск решения* и поставить «галочку» рядом с ним. Если в окне *Надстройки* нет элемента *Поиск решения*, то необходимо доустановить Excel (рис. 3.1).

№	A	B
1	Переменные	
2	*x*	0
3	*y*	0
4	Целевая функция	
5	*5x+10y*	=5*B2+10*B3
6	Ограничения	
7	*2x+7y*	=2*B2+7*B3
8	*3x+9y*	=3*B2+9*B3

Рис. 3.1. Пример занесения данных в электронную таблицу Excel

Вводим эти формулы. Выделяем ячейку B5, в которой вычисляется целевая функция. Вызываем *Сервис/Поиск решения*. В диалоговом окне в поле ввода *Установить целевую ячейку* уже содержится $B$5. Установим переключатель *Равной максимальному значению*. Щелкнем кнопку *Предложить*, и в поле ввода *Изменяя ячейки* появится $B$2:$B$3. Щелкнем кнопку *Добавить*. Появится диалоговое окно *Добавление ограничения*. В поле ввода *Ссылка на ячейку* укажем $B$7. Правее в выпадающем списке с условными операторами выберем <= (есть условный оператор ЦЕЛ, что позволяет решать задачи целочисленного программирования). В поле ввода *Ограничение* введем 70. Щелкнем кнопку *Добавить* и введем другие ограничения. *ОК*.

Мы окажемся в диалоговом окне и увидим введенные ограничения. С помощью кнопок *Изменить* и *Удалить* мы можем изменить и удалить ограничение. Щелкнем кнопку *Параметры*. Установим два флажка: *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*. *ОК*. *Выполнить*. В ячейке B5 указано 83,33. Это максимальная прибыль. В ячейках B2:B3 указаны значения оптимального плана производства: $x = 16{,}67$ и $y = 0$.

Конечно, компьютеры обрабатывают задачи линейного программирования быстро и точно. Может возникнуть вопрос, зачем нужно уметь решать такие задачи вручную. Но важно понимать, как именно получаются решения. Иначе компьютер – это черный ящик, из которого вдруг появляется решение.

Базовое понимание основного процесса (как в формулировке задач, так и в интерпретации результатов) – это неоспоримое преимущество. И такое понимание достигается, несомненно, умением решать соответствующие задачи без помощи компьютеров. Но на практике предпочтение отдается компьютерному решению задач линейного программирования из-за быстроты и точности этого процесса.

3.4. Транспортная задача

3.4.1. Экономико-математическая модель транспортной задачи

Существуют поставщики и потребители некоторого однородного груза.

У каждого поставщика имеется определенное количество единиц этого груза (мощность поставщика).

Каждому потребителю нужно некоторое количество единиц этого груза (спрос потребителя).

Известны затраты на перевозку единицы груза от каждого из поставщиков к каждому из потребителей.

Нужно составить такой план перевозок от поставщиков к потребителям, при котором:

1) суммарные затраты на перевозку груза будут минимальны;

2) по возможности будут задействованы все мощности поставщиков;

3) по возможности будет удовлетворен весь спрос потребителей.

Закрытая модель транспортной задачи – это модель, в которой суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей. В противном случае модель называется открытой.

Для решения транспортных задач разработаны специальные методы: распределительный метод (если транспортная задача задана в виде таблицы) и метод транспортной сети (если транспортная задача задана в виде транспортной сети).

Мы рассмотрим решение транспортной задачи с помощью пакета Excel.

3.4.2. Транспортная задача и Excel

В Excel существует надстройка *Поиск решения*, которая, в частности, помогает решать транспортные задачи. Нужно воспользоваться меню *Сервис/Поиск решения*.

Пример. Рассматривается следующая транспортная задача.

Таблица 3.10

Исходные данные

	70	120	150	130
30	4	7	2	3
190	3	1	2	4
250	5	6	3	7

В 1-м столбце указаны мощности поставщиков, в 1-й строке – спрос потребителей. Остальные числа таблицы – это стоимость перевозки единицы груза от соответствующего поставщика к соответствующему потребителю. Например, стоимость перевозки единицы груза от 3-го поставщика ко 2-му потребителю равна 6. Нужно составить оптимальный план поставок.

	A	B	C	D	E
1		70	120	150	130
2	30	4	7	2	3
3	190	3	1	2	4
4	250	5	6	3	7
5	Переменные				
6					
7					
8	Целевая функция	= 4*B5 + 7*C5 + 2*D5 + 3*E5 + 3*B6 + 1*C6 + 2*D6 + 4*E6 + 5*B7 + 6*C7 + 3*D7 + 7*E7			
9	Ограничения				
10	70	= B5 + B6 + B7			
11	120	= C5 + C6 + C7			
12	150	= D5 + D6 + D7			
13	130	= E5 + E6 + E7			
14	30	= B5 + C5 + D5 + E5			
15	190	= B6 + C6 + D6 + E6			
16	250	= B7 + C7 + D7 + E7			

Если модель открытая, то ее нужно свести к закрытой модели. При решении закрытой модели можно воспользоваться Excel. В данном случае модель закрытая (470 = 470).

Вводим формулы. Выделяем ячейку B8, в которой вычисляется целевая функция. Вызываем *Сервис/Поиск решения*. В диалоговом окне в поле ввода *Установить целевую ячейку* уже содержится $B$8. Установим переключатель *Равной минимальному значению*. В поле ввода *Изменяя ячейки* нужно указать $B$5:$E$7.

Щелкнем кнопку *Добавить*. Появится диалоговое окно *Добавление ограничения*. В поле ввода *Ссылка на ячейку* укажем $B$10. Правее в выпадающем списке с условными операторами выберем =. В поле ввода *Ограничение* введем $A$10. Щелкнем кнопку *Добавить* и введем другие ограничения. *ОК*. Мы окажемся в диалоговом окне и увидим введенные ограничения. С помощью кнопок *Изменить* и *Удалить* мы можем изменить и удалить ограничение.

Щелкнем кнопку *Параметры*. Установим два флажка: *Линейная модель* и *Неотрицательные значения*. *ОК*. *Выполнить*.

В ячейке B8 указано 1500. Это минимальные затраты на перевозку. В ячейках B5:E7 указаны значения оптимального плана поставок.

	A	B	C	D	E
5	Переменные	0	0	0	30
6		0	120	0	70
7		70	0	150	30

1-й поставщик должен доставить 30 единиц груза 4-му потребителю. 2-й поставщик должен доставить 120 единиц груза 2-му потребителю и 70 единиц груза 4-му потребителю. 3-й поставщик должен доставить 70 единиц груза 1-му

потребителю, 150 единиц груза 3-му потребителю и 30 единиц груза 4-му потребителю.

3.4.3. Открытая модель

Открытая модель сводится к закрытой модели.

Фиктивный потребитель

Если суммарная мощность поставщиков больше суммарного спроса потребителей, то вводится фиктивный потребитель, которому приписывается спрос, равный разнице между суммарной мощностью поставщиков и суммарным спросом потребителей. Стоимость перевозки единицы груза от поставщиков до фиктивного потребителя полагается равной нулю. Полученная закрытая модель решается. Груз, предназначенный фиктивному потребителю, остается у поставщика.

	30	40	60
40	7	8	6
60	6	5	10
50	4	3	9

Суммарная мощность поставщиков 40 + 60 + 50 = 150, суммарный спрос потребителей 30 + 40 + 60 = 130. Это открытая модель. Вводим фиктивного потребителя, которому припишем спрос 150 – 130 = 20. Стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя равна нулю. Получаем следующую закрытую модель.

Пример

	30	40	60	20
40	7	8	6	0
60	6	5	10	0
50	4	3	9	0

Фиктивный поставщик

Если суммарная мощность поставщиков меньше суммарного спроса потребителей, то вводится фиктивный поставщик, которому приписывается мощность, равная разнице между суммарным спросом потребителей и суммарной мощностью поставщиков. Стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика до потребителей полагается равной нулю. Полученная закрытая модель решается. Потребитель, приписанный к фиктивному поставщику, просто не получает соответствующего груза.

	20	30	50
10	6	7	5
40	7	6	11
30	3	2	8

Суммарная мощность поставщиков 10 + 40 + 30 = 80, суммарный спрос потребителей 20 + 30 + 50 = 100. Модель – открытая.

Вводим фиктивного поставщика, которому припишем мощность 100 – 80 = 20. Стоимость перевозки единицы груза от фиктивного поставщика до потребителей равна нулю.

Получаем следующую закрытую модель.

	20	30	50
10	6	7	5
40	7	6	11
30	3	2	8
20	0	0	0

3.5. Задача о назначениях

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. В этом случае число поставщиков равно числу потребителей, мощность каждого поставщика и спрос каждого потребителя равны единице. Для решения задач о назначениях разработан венгерский метод. Мы рассмотрим решение задачи о назначениях с помощью пакета Excel.

Пример. Существуют 4 базы A_1, A_2, A_3, A_4, и 4 торговые точки B_1, B_2, B_3, B_4. Расстояния от баз до торговых точек заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 12 & 5 \\ 3 & 14 & 9 & 1 \\ 13 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 15 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Нужно так прикрепить базы к торговым точкам, чтобы суммарное расстояние было минимальным.

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Поэтому при ее решении также можно воспользоваться надстройкой *Поиск решения*. Если ищется минимум целевой функции, то в диалоговом окне нужно установить переключатель *Равной минимальному значению*. Если ищется максимум целевой функции, то в диалоговом окне нужно установить переключатель *Равной максимальному значению*.

Мы ищем минимум целевой функции для следующей транспортной задачи:

	1	1	1	1
1	10	20	12	5
1	3	14	9	1
1	13	8	6	9
1	7	15	8	10

Используя материал из предыдущих задач, получаем ответ: A_1 прикрепляется к B_4, A_2 – к B_1, A_3 – к B_2, A_4 – к B_3. Минимальное суммарное расстояние равно 24.

Математическое программирование занимается исследованием детерминированных и одноцелевых задач. Слово «программирование» в данном случае означает «планирование». К математическому программированию относится:

1. **Линейное программирование:** нахождение экстремального значения линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, связывающих эти переменные.

2. **Нелинейное программирование:** целевая функция и ограничения могут быть нелинейными функциями.

3. **Целочисленное программирование:** особый случай в задачах линейного и нелинейного программирования, когда на оптимальные решения накладывается условие целочисленности искомых параметров.

4. **Динамическое программирование:** для отыскания оптимального решения планируемая операция разбивается на ряд шагов (этапов) и планирование осуществляется последовательно от этапа к этапу. Однако выбор метода решения на каждом этапе производится с учетом интересов операции в целом.

5. **Теория графов**, с помощью которой решаются многие сетевые задачи, связанные с минимальным протяжением сети, построение кольцевого маршрута и т.д.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

– набор **констант**, характеризующих, например, наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы;

– искомые **переменные** величины, например, количество запланированной к выпуску продукции по всему ассортименту;

– максимум или минимум **целевой функции**, например, запланированной прибыли;

– систему ограничений в форме **линейных уравнений и неравенств**, например, условие того, что расход материала не должен превышать его запас;

– требование **неотрицательности** переменных (если не предусмотрено иное).

Решение практической задачи всегда связано с исследованием, с преобразованием некоторого объекта (материального или информационного) или с управлением им (рис. 3.2).

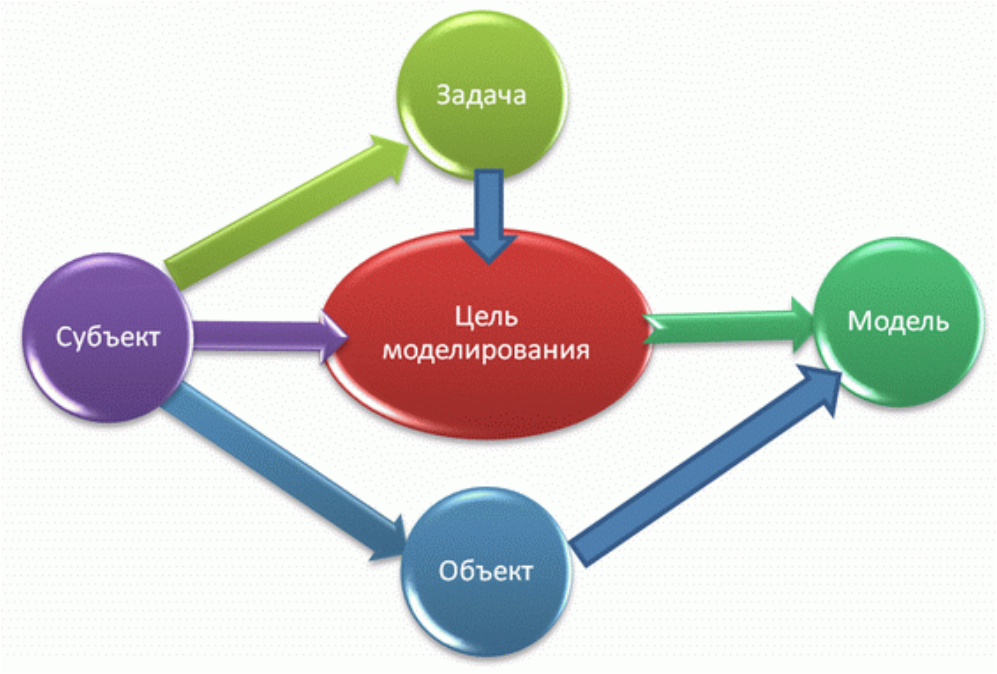


Рис. 3.2. Схема моделирования объекта (процесса)

При решении «стандартной» задачи в линейном программировании нужно определить максимум линейной целевой функции

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

при условиях

$$r_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq R_j \; j = 1, 2, \ldots, m$$

Здесь целевая функция формируется как скалярное произведение двух векторов. Один из них – вектор искомых переменных x_i. Компонентами другого вектора являются целевые коэффициенты c_i. Условия задачи можно сформулировать так: «Расход r_j не должен превышать имеющиеся ресурсы R_j». Вектор расхода r_j есть сумма произведений матрицы нормированных коэффициентов a_{ij} на вектор искомых переменных x_i.

Основной аналитический метод решения задач линейного программирования – это **симплексный метод**. Он сводится к вычислительной процедуре, основанной на принципе **последовательного улучшения решений** – перехода от одной **базисной точки** к другой, для которой значение целевой функции больше. Доказано, что если оптимальное решение существует, то оно обязательно будет найдено через конечное число шагов. Геометрическая интерпретация метода состоит в последовательном движении по вершинам симплекса (n-мерного тетраэдра). Симплекс-метод послужил исходным пунктом для разработки целого семейства алгоритмов решения как линейных, так и нелинейных выпуклых задач оптимизации.

Задача. Выпуск продукции

Фирма производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем

машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3 $м^2$ досок, а для модели В – 4 $м^2$. Фирма может получать от своих поставщиков до 1700 $м^2$ досок в неделю. Для каждого изделия модели А требуется 12 мин. машинного времени, а для изделия модели В – 30 мин. В неделю можно использовать 160 часов машинного времени.

Сколько изделий каждой модели следует выпускать фирме в неделю, если каждое изделие модели А приносит 200 руб. прибыли, а каждое изделие модели В – 400 руб. прибыли?

В данном случае **объектом** является фирма, а ее деятельность представляется в виде **математической модели**, т.е. учитываются только некоторые количественные стороны этой деятельности. Менеджер **(субъект)** ставит себе **задачу**: составить недельный производственный план фирмы. При этом он руководствуется **целью моделирования** – максимальной эффективностью производства, получением **максимальной прибыли**.

Построение математической модели

Пусть x_1 – количество выпущенных за неделю полок модели А, а x_2 – количество выпущенных за неделю полок модели В. Тогда составим следующие соотношения:

$3x_1$ – количество досок, требуемых на неделю для изготовления полок модели А.

$4x_2$ – количество досок, требуемых на неделю для изготовления полок модели В.

$3x_1 + 4x_2$ – количество досок требуемых на неделю для изготовления книжных полок двух моделей. По условию задачи это число не должно превышать 1700$м^2$, следовательно, получаем первое ограничение:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1700 \qquad (3.1)$$

Найдем ограничение на использование машинного времени.

12 мин. составляют 0,2 часа, а 30 мин. – 0,5 часа, таким образом:

$0{,}2x_1$ – количество времени, требуемое на неделю для обработки полок модели А;

$0{,}5x_2$ – количество времени, требуемое на неделю для обработки полок модели В;

$0{,}2x_1 + 0{,}5x_2$ – количество времени, требуемое на неделю для обработки двух моделей. По условию задачи это число не должно превышать 160 часов, следовательно, получаем второе ограничение:

$$0{,}2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 160 \qquad (3.2)$$

или

$$2x_1 + 5x_2 \leq 1600 \qquad (3.2)$$

Кроме того, поскольку x_1 и x_2 выражают еженедельный объем выпускаемых изделий, то они не могут быть отрицательными, то есть

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \qquad (3.3)$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти такие значения x_1 и x_2, при которых еженедельная прибыль будет максимальной. Составим выражение для еженедельной прибыли:

$200x_1$ – еженедельная прибыль, получаемая от продажи полок модели А.

$400x_2$ – еженедельная прибыль, получаемая от продажи полок модели В.

$F = 200x_1 + 400x_2$ – еженедельная прибыль, которая должна быть максимальной.

Таким образом, имеем следующую математическую модель для данной задачи:

$3x_1 + 4x_2 \leq 1700$

$2x_1 + 5x_2 \leq 1600$

$F(x_1, x_2) = 200x_1 + 400x_2 \rightarrow \max$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, x_1 – целое, x_2 – целое.

Необходимо найти значения переменных x_1 и x_2, при которых данная функция F принимает максимальное значение, при соблюдении ограничений, накладываемых на эти переменные.

Решения, удовлетворяющие системе ограничений и требованию неотрицательности, являются **допустимыми**, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованию максимизации (минимизации) целевой функции являются **оптимальными.**

Область допустимых решений целевой функции F можно найти графическим методом.

Построим прямоугольную систему координат, где по оси OX отложим значения x_1, а по оси OY отложим значения x_2. Так как, согласно условию (3.3), x_1 и x_2 неотрицательны, то можно ограничиться рассмотрением первого квадранта (рис. 3.3).

Рассмотрим первое ограничение:

$3x_1 + 4x_2 \leq 1700$

Заменим в данном ограничении знак неравенства знаком равенства и построим прямую

$3x_1 + 4x_2 \leq 1700$

Для этого найдем две точки, принадлежащие данной прямой. Пусть, например, $x_1 = 0$, $4x_2 = 1700$ или $x_2 = 425$. (0; 425) – координаты первой точки, принадлежащей прямой.

Пусть $x_2 = 0$, то $3x_1 = 1700$, следовательно, $x_1 = 567$. (567; 0) – координаты второй точки, принадлежащей прямой. Отметим эти точки на числовых осях.

Аналогично, для второго ограничения:

$2x_1 + 5x_2 \leq 1600$

При $x_1 = 0$, $x_2 = 320$ (0; 320)

При $x_2 = 0$, $x_1 = 800$ (800; 0)

Построим данные прямые (на рисунке они соответственно обозначены (1) и (2)).

Теперь найдем на чертеже такие полуплоскости, которые соответствуют неравенствам (3.1) и (3.2). Прямая (1) делит координатную плоскость на две полуплоскости. Одна полуплоскость расположена выше прямой, вторая ниже. Чтобы найти ту полуплоскость, которая соответствует неравенству (3.1), необходимо взять любую точку, принадлежащую одной из полуплоскостей и под-

ставить ее координаты в неравенство. Если неравенство будет верным, то данная полуплоскость является искомой.

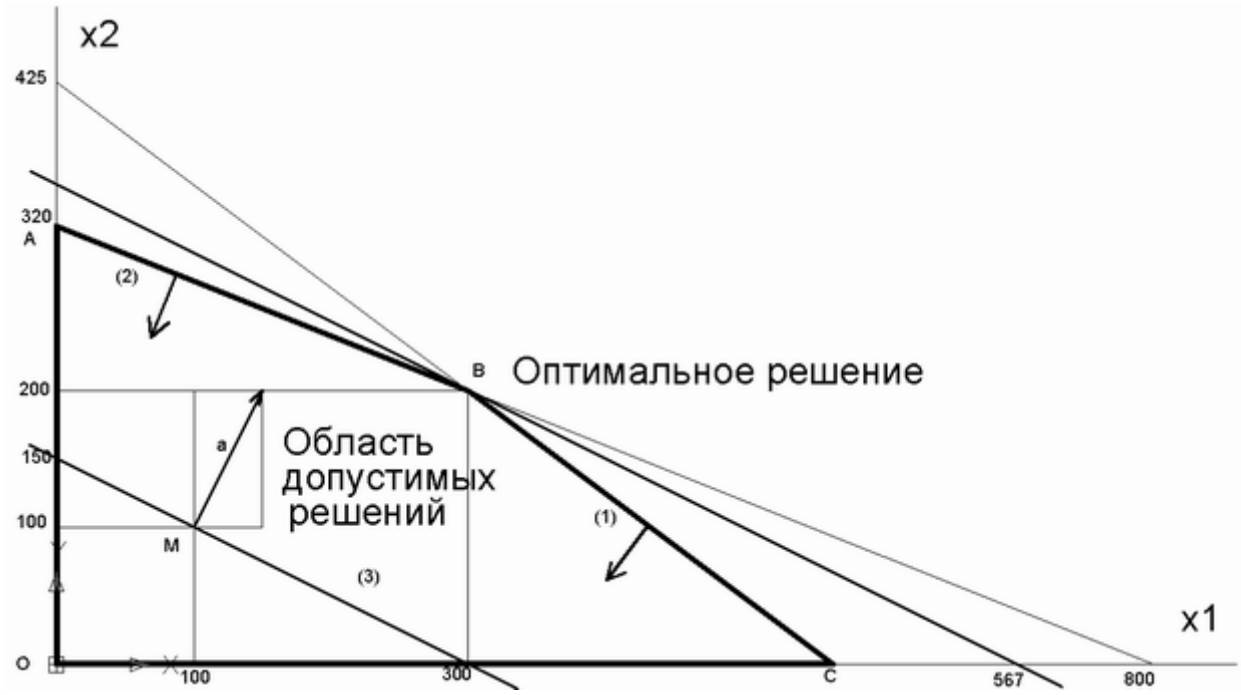


Рис. 3.3. Графическое решение задачи о максимальной прибыли

Например, возьмем точку с координатами (0; 0) и подставим ее координаты в неравенство (3.1) $3x_1 + 4x_2 \leq 1700$. Получается $0 \leq 1700$ – данное неравенство является верным, следовательно, неравенству (3.1) удовлетворяет полуплоскость, лежащая ниже прямой (1).

Аналогично, поступим для неравенства (3.2) $2x_1 + 5x_2 \leq 1600$. Возьмем точку с координатами (0; 0). Получается $0 \leq 1600$ – данное неравенство верно. Неравенству (3.2) удовлетворяет полуплоскость, расположенная ниже прямой (2). Стрелки на каждой границе показывают, с какой стороны прямой выполнены ограничения. Учитывая неравенства (3.3), получаем, что выделенный четырехугольник 0ABC является областью, содержащей точки, для которых выполнены условия (3.1–3.3). Точки, лежащие внутри и на границе этой области, являются **допустимыми решениями**. Среди всех допустимых решений нужно найти **оптимальное решение**, при котором функция F будет принимать максимальное значение.

Для поиска оптимального решения построим по функции F прямую уровня.

Возьмем произвольную точку, принадлежащую области допустимых решений – четырехугольнику 0ABC, например, точку M с координатами (100; 100). Подставим координаты точки M в функцию F.

$$F(100; 100) = 200 \cdot 100 + 400 \cdot 100 = 60000$$

Прямая уровня будет иметь следующий вид: $2x_1 + 4x_2 = 600$.

Построим полученную прямую. Для этого необходимо найти координаты двух произвольных точек этой прямой. Одна точка у нас уже есть – это точка

M(100; 100). Найдем еще одну точку. Пусть $x_2 = 0$, тогда $x_1 = 300$. Следовательно, координаты дополнительной точки (300; 0). Отметим полученные точки и построим прямую уровня (на рис. 3.3 она обозначена (3)).

Значения функции F будут возрастать по мере того, как прямая уровня удаляется от начала координат в положительном квадранте. Направление возрастания функции F будет совпадать с вектором, координаты которого являются коэффициентами при переменных x_1 и x_2 функции F. На рисунке – это вектор *a{2,4}*, отложенный от точки M. Обратите внимание, что вектор *a*, определяющий направление возрастания функции F, всегда будет перпендикулярен прямой уровня.

Максимизация целевой функции F

Для нахождения точки, в которой функция F достигнет своего максимального значения, необходимо перемещать прямую уровня по направлению вектора *a* до пересечения этой прямой с граничной точкой области допустимых решений. На нашем рисунке – это точка B.

Найдем координаты точки B. Данная точка расположена на пересечении двух прямых (1) и (2), поэтому, чтобы найти ее координаты необходимо решить следующую систему уравнений:

$3x_1 + 4x_2 = 1700;$

$2x_1 + 5x_2 = 1600.$

Легко убедиться, что оптимальное решение этой задачи задается в **вершине выпуклого четырехугольника** координатами

$x_1 = 300; x_2 = 200.$

Значит, чтобы получить максимальную прибыль $F = 200x_1 + 400x_2 = 60000 + 80000 = 140000$ р., фирме необходимо выпускать в неделю триста полок модели A и двести полок модели B.

3.6. Принятие решений в условиях риска

3.6.1. Одноэтапное принятие решения в условиях риска

Для принятия решений в условиях риска за один шаг могут использоваться следующие критерии: 1) ожидаемого значения; 2) ожидаемого значения и дисперсии; 3) наиболее вероятное событие.

Если используется критерий ожидаемого значения, то наилучший вариант решения определяется по среднему значению:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}{n} \quad . \qquad (3.4)$$

В качестве такого критерия могут использоваться ожидаемая прибыль или ожидаемые затраты. Для выбора решения по данному критерию необходимо, что бы одно и тоже решение принималось достаточно большое число раз. Только в этом случае действительный результат может совпасть с ожидаемым результатом.

Для редко встречающихся ситуаций обычно используют второй критерий – ожидаемое значение результата и дисперсия. Формула этого критерия в случае положительного эффекта от принятия решения:

$$\bar{R} - K \times D(R) \ , \qquad (3.5)$$

где $\bar{R}$ – ожидаемый результат;

D(R) – дисперсия;

К – коэффициент, который характеризует степень склонности ЛПР к риску.

С помощью этого коэффициента определяется степень важности дисперсии по отношению к ожидаемому результату.

Если *К* >1, то будет приниматься решение, когда реакция на отрицаемый результат очень сильная. Если *К*<1, то уровень склонности к риску будет повышаться.

Если ожидаемый результат - убытки, то формула этого критерия такова:

$$\bar{R} + K \times D(R) \, . \qquad (3.6)$$

Критерий наиболее вероятного события основан на преобразовании случайной ситуации в детерминированную. При этом случайная величина заменяется единственным значением, имеющим наибольшую вероятность реализации.

Предположим, что прибыль от реализации жилого дома может иметь четыре значения:

Pj(Cj) j=$\overline{1,4}$

$C_1 = 15\%$ $\quad P_1(C_1) = 0.3$

$C_2 = 10\%$ $\quad P_2(C_2) = 0.25$ $\qquad P_j(C_j^*) = \max_j P_j(C_j)$

$C_3 = 7\%$ $\quad P_3(C_3) = 0.35$

$C_4 = 20\%$ $\quad P_4(C_4) = 0.1$

При принятии решений по данному критерию вероятности рассчитываются на основе прошлого опыта, либо используется субъективная вероятность, т.е. предположение лица, принимающего решение, относительного определенного результата. Для выбора субъективной вероятности можно использовать следующую шкалу:

0 – событие (результат) полностью исключено;

0,1 – событие в высшей степени неопределенно;

0,2–0,3 – событие весьма неправдоподобно;

0,4 – событие неправдоподобно;

0,6 – событие вероятно;

0,7–0,8 – событие весьма вероятно;

0,9 – событие в высшей степени вероятно;

1 – событие полностью достоверно.

3.6.2. Многоэтапное принятие решения в условиях риска. Деревья принятия решений

Если решение принимается в условиях риска, то стоимости альтернативных решений описываются вероятностными распределениями.

Поэтому принимаемое решение основывается на использовании критерия ожидаемого значения, в соответствии с которым альтернативные решения сравниваются с точки зрения максимизации ожидаемой прибыли или минимизации ожидаемых затрат. Предполагается, что прибыль (затраты), связанная с каждым альтернативным решением, является случайной величиной.

Деревья решений – это графическое средство анализа решений в условиях риска.

Деревья решений создаются для использования в моделях, в которых принимается последовательность решений, каждая из которых ведет к некоторому результату.

Рисуют деревья слева направо.

Построение и анализ дерева решений включают выполнение следующих этапов:

Этап 1. Постановка проблемы и поиск альтернатив решения: выявление проблемы через сравнение достигнутого состояния и желаемого состояния; анализ причин, вызвавших проблему; выявление и определение значимых для постановки проблемы целей; определение перечня подпроблем, входящих в проблему, и логической последовательности их разрешения; подбор альтернативных решений для каждого из решений, в зависимости от условий внешней среды.

Этап 2. Конструирование дерева решений в виде схематичного представления комплекса решаемых подпроблем.

Рисуют деревья слева направо. Места, где принимаются решения, обозначают квадратами □ , места появления исходов – кругами О, возможные решения – пунктирными линиями---------, возможные исходы – сплошными линиями ——.

Для каждой альтернативы мы считаем *ожидаемую стоимостную оценку* (EMV) – максимальную из сумм оценок выигрышей, умноженных на вероятность реализации выигрышей, для всех возможных вариантов.

Пример 1. Главному инженеру компании надо решить, монтировать или нет новую производственную линию, использующую новейшую технологию. Если новая линия будет работать безотказно, компания получит прибыль 200 млн. рублей. Если же она откажет, компания может потерять 150 млн. рублей. По оценкам главного инженера, существует 60 % шансов, что новая производственная линия откажет. Можно создать экспериментальную установку, а затем уже решать, монтировать или нет производственную линию. Эксперимент обойдется в 10 млн. рублей. Главный инженер считает, что существует 50 % шансов, что экспериментальная установка будет работать. Если экспериментальная установка будет работать, то 90 % шансов за то, что смонтированная производственная линия также будет работать. Если же эксперимен-

тальная установка не будет работать, то только 20 % шансов за то, что производственная линия заработает. Следует ли строить экспериментальную установку? Следует ли монтировать производственную линию? Какова ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения? Решение представлено на рис. 3.4.

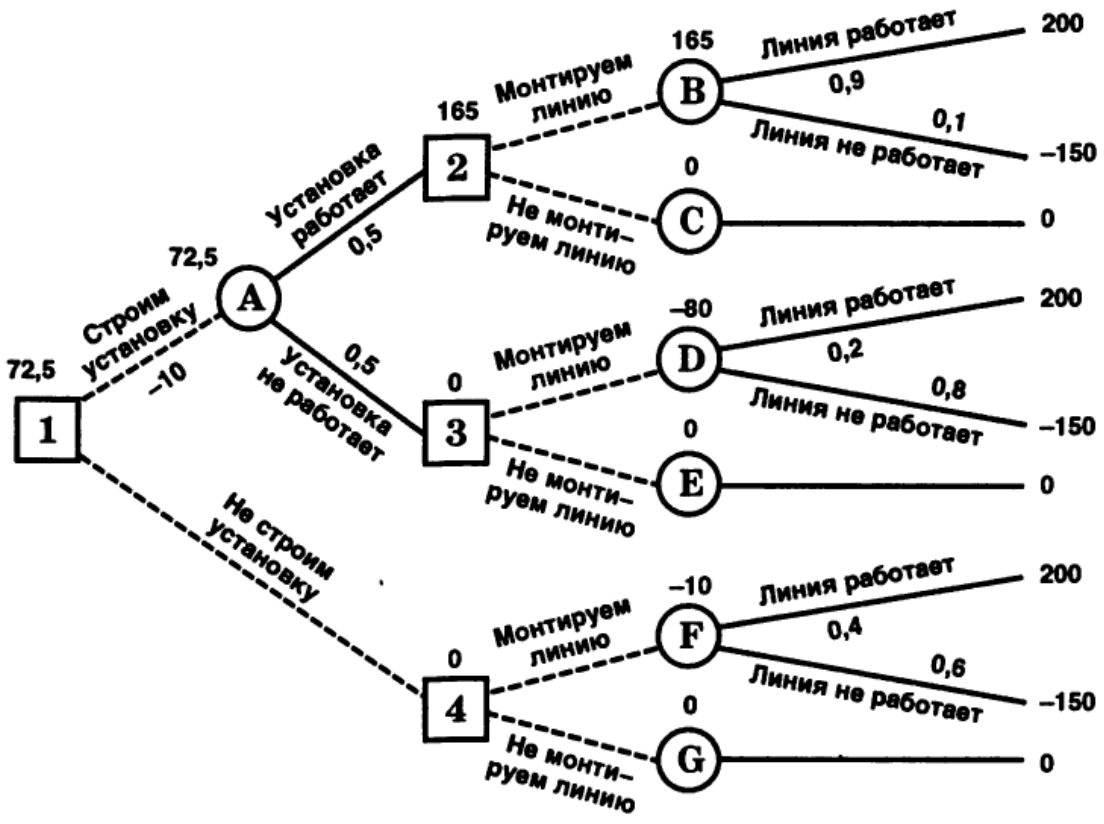


Рис. 3.4. Дерево решений примера 1

В узле *F* возможны исходы «линия работает» с вероятностью 0,4 (что приносит прибыль 200) и «линия не работает» с вероятностью 0,6 (что приносит убыток –150) => оценка узла *F:* EMV(F) = 0,4·200 + 0,6·(–150) = –10. Это число мы пишем над узлом *F*.

EMV(G) = 0.

В узле 4 мы выбираем между решением «монтируем линию» (оценка этого решения EMV(F) = -10) и решением «не монтируем линию» (оценка этого решения EMV(G) = 0): EMV(4) = max {EMV(F), EMV(G)} = max {-10, 0} = 0 = = EMV(G). Эту оценку мы пишем над узлом 4, а решением «монтируем линию» отбрасываем и зачеркиваем.

Аналогично:

EMV(B) = 0,9·200 + 0,1·(-150) = 180 - 15 = 165.

EMV(C) = 0.

EMV(2) = max {EMV(B), EMV(C)} = max {165, 0} = 165 = EMV(B). Поэтому в узле 2 отбрасываем возможное решение «не монтируем линию».

EMV(D) = 0,2·200 + 0,8·(-150) = 40 – 120 = –80.

EMV(E) = 0.

EMV(3) = max {EMV(D), EMV(E)} = max {-80, 0} = 0 = EMV(E). Поэтому в узле 3 отбрасываем возможное решение «монтируем линию».

EMV(A) = 0,5·165 + 0,5·0 - 10 = 72,5.

EMV(1) = max {EMV(A), EMV(4)} = max {72,5; 0} = 72,5 = EMV(A). Поэтому в узле 1 отбрасываем возможное решение «не строим установку».

Ожидаемая стоимостная оценка наилучшего решения равна 72,5 млн. рублей. Строим установку. Если установка работает, то монтируем линию. Если установка не работает, то линию монтировать не надо.

Пример 2. Компания рассматривает вопрос о строительстве завода. Возможны три варианта действий.

А. Построить большой завод стоимостью M1 = 700 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере *R1* = 280 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью *p1* = 0,8 и низкий спрос (ежегодные убытки R2 = 80 тысяч долларов) с вероятностью *p2* – 0,2.

Б. Построить маленький завод стоимостью M2 = 300 тысяч долларов. При этом варианте возможны большой спрос (годовой доход в размере R3 – 180 тысяч долларов в течение следующих 5 лет) с вероятностью p1 = 0,8 и низкий спрос (ежегодные убытки R4 = 55 тысяч долларов) с вероятностью p2 = 0,2.

В. Отложить строительство завода на один год для сбора дополнительной информации, которая может быть позитивной или негативной с вероятностью p3=0,7 и p4=0,3 соответственно. В случае позитивной информации можно построить заводы по указанным выше расценкам, а вероятности большого и низкого спроса меняются на p5= 0,9 и p6=0,1соответственно. Доходы на последующие четыре года остаются прежними. В случае негативной информации компания заводы строить не будет.

Все расчеты выражены в текущих ценах и не должны дисконтироваться. Нарисовав дерево решений, определим наиболее эффективную последовательность действий, основываясь на ожидаемых доходах.

Решение представлено на рис. 3.5.

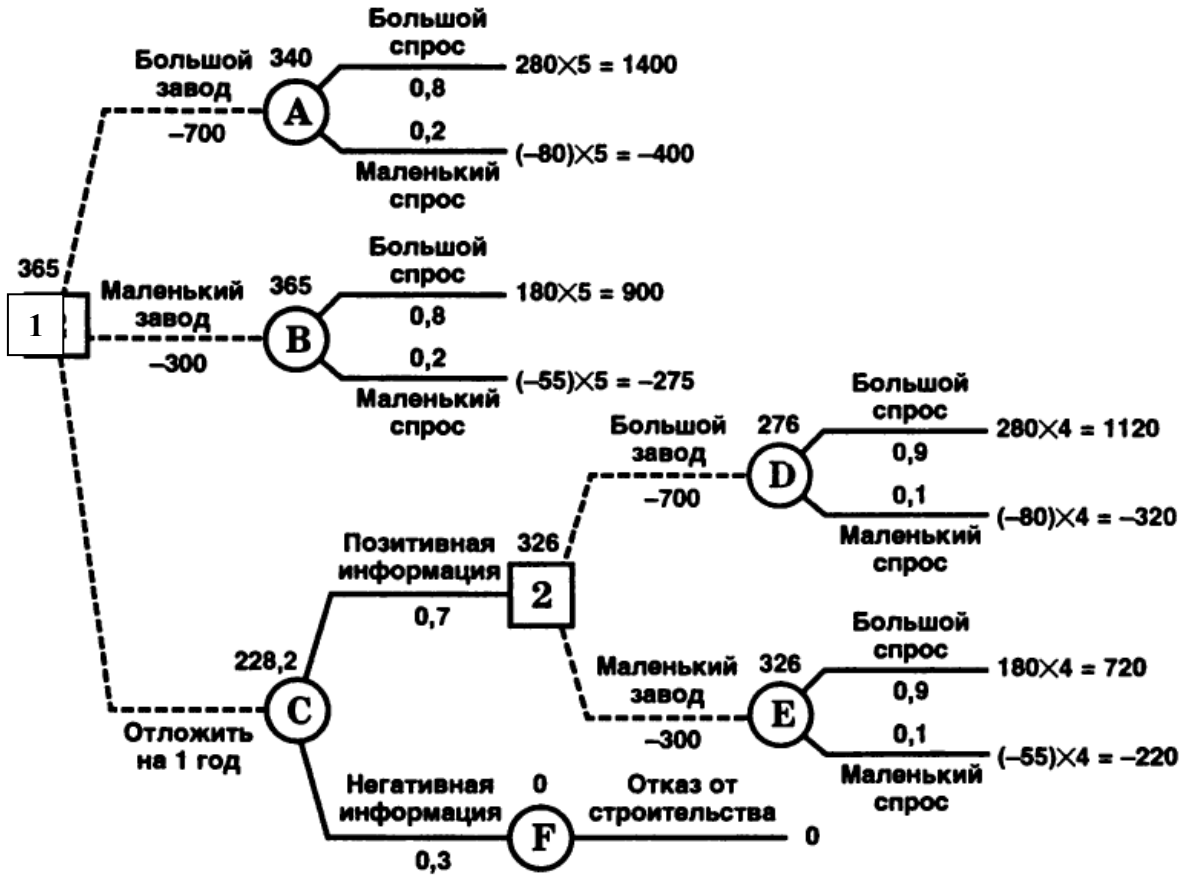


Рис. 3.5. Дерево решений примера 2

Ожидаемая стоимостная оценка узла *A* равна EMV(A) = 0,8·1400 + + 0,2·(-400) - 700 = 340.

EMV(B) = 0,8·900 + 0,2·(-275) - 300 = 365.

EMV(D) = 0,9·1120 + 0,1·(-320) - 700 = 276.

EMV(E) = 0,9·720 + 0,1·(-220) - 300 = 326.

EMV(2) = max {EMV(D), EMV(E)) = max (276, 326) = 326 = EMV(E). Поэтому в узле 2 отбрасываем возможное решение «большой завод».

EMV(C) = 0,7·326 + 0,3·0 = 228,2.

EMV(1) = max (EMV(A), EMV(B), EMV(C)) = max {340; 365; 228,2} = = 365 = EMV(B). Поэтому в узле 1 выбираем решение «маленький завод». Исследование проводить не нужно. Строим маленький завод. Ожидаемая стоимостная оценка этого наилучшего решения равна 365 тысяч долларов.

3.7. Принятие решений в условиях неопределенности, когда противником является «природа»

При принятии решения в условиях неопределенности возможны две ситуации:

Первая ситуация характеризуется тем, что решение принимается, когда противником является «природа», т.е. отсутствует противодействующий активный противник. Такие ситуации по управлению строительством встречаются чаще.

Вторая ситуация характеризуется присутствием активно противодействующего противника. В этой ситуации сталкиваются интересы противоположных сторон. Каждая из сторон преследует свои цели.

Для решения задач, возникающих в первой ситуации, используется теория статистических решений. Для задач, возникающих во второй ситуации, применяется теория игр.

Принятие решений в условиях неопределенности, когда противником является «природа».

В этом случае содержание задачи оформляется в виде матрицы. Строки этой матрицы соответствуют действиям, которое может предпринимать лицо, принимаемое решение (ЛПР), а столбцы – всем возможным ситуациям или состояниям природы, в которых будут приниматься решения.

На пересечении строк и столбцов проставляются значения дохода или потерь, которые понесет ЛПР, выбрав определенное действие при конкретном состоянии природы.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & \theta_1 & \theta_2 \ldots & \theta_j \ldots & \theta_n \\
\hline
\alpha_1 & \nu(\alpha_1\,\theta_1) & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_2 & \nu(\alpha_2\,\theta_1) & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_i & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_m & & & & \\
\hline
\end{array}
\qquad \nu(\alpha_i\,\theta_j)
$$

α_i – вариант действия, выбранный ЛПР

θ_j – вариант состояния природы

ν – выигрыши или потери, которые будет иметь ЛПР, если в состоянии природы θ_j будет выбран вариант действия θ_j.

Для выбора вариантов решения можно использовать следующие критерии:

1. Критерий Лапласа.
2. Минимаксный (максиминный) критерий.
3. Критерий Севиджа.
4. Критерий Гурвица.

Принятие решения по критерию Лапласа

При выборе варианта решения по этому критерию используется критерий наибольше ожидаемого варианта или наименьших ожидаемых потерь. При этом считается, что вероятность реализации любого состояния одинакова и равна $\frac{1}{n}$.

Критерий Лапласа записывается так:

$$\max_{\alpha_i}\left\{\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} V(\alpha_{\mathrm{i}}\theta_j)\right\}, \text{ если } V(\alpha_i\theta_j) \text{ – выигрыш;} \tag{3.7}$$

$$\min_{\alpha_i}\left\{\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} V(\alpha_{\mathrm{i}}\theta_j)\right\}, \text{ если } V(\alpha_i\theta_j) \text{ – потери.} \tag{3.8}$$

Принятие решения по минимаксному (максиминному) критерию.

Этот критерий является наиболее осторожным и основывается на выборе наилучшего из наихудших вариантов (альтернатив). Если элемент V является выигрышем, то наилучшая из наихудших возможностей будет выбрана по максиминнному критерию:

$$\max_{\alpha_i}\ \min_{\theta_{\mathrm{j}}}\left\{V(\alpha_i\theta_j)\right\} \tag{3.9}$$

В этом случае в начале каждого варианта действий по столбцу выбирается наихудший вариант. Если элемент матрицы V – затраты, то для выбора варианта используется минимаксный критерий, т.е. тогда из наихудших вариантов действия выбирается наилучший:

$$\min_{\alpha_i}\ \max_{\theta_{\mathrm{j}}}\left\{V(\alpha_i\theta_j)\right\}. \tag{3.10}$$

Принятие решения по критерию Севиджа

Так как предыдущий критерий приводит к нелогичным действиям, особенно в том случае, когда в матрице разброс коэффициентов приводит к нелогичным действиям, то был построен критерий, по которому выбиралось действие, учитывающее риск. В данном случае под риском понимают «сожаление» ЛПР о том, что он не выбрал наилучшего действия в состоянии θ_j – это и называется критерием Севиджа.

Для выбора решения нужно построить матрицу рисков или «сожалений», элементы которой подсчитываются таким образом:

если $V(\ldots)$ – доход, то $r\left(\alpha_{\mathrm{i}}\theta_{\mathrm{j}}\right)=\max\limits_{\alpha_{\mathrm{i}}} V\left(\alpha_{\mathrm{i}}\theta_{\mathrm{j}}\right)-V\left(\alpha_{\mathrm{i}}\theta_{\mathrm{j}}\right)$ (3.11)

если $V(\ldots)$ – потери, то $r\left(\alpha_{\mathrm{i}}\theta_{\mathrm{j}}\right)=V\left(\alpha_{\mathrm{i}}\theta_{\mathrm{j}}\right)-\min\limits_{\alpha_{\mathrm{i}}} V\left(\alpha_{\mathrm{i}}\theta_{\mathrm{j}}\right)$ (3.12)

По построенной матрице рисков для выбора варианта решения используется минимаксный или максиминный критерий.

Принятие решения по критерию Гурвица

С помощью этого критерия можно учесть различные подходы к принятию решений: от самого оптимистичного до наиболее пессимистического. Этот критерий имеет следующее выражение:

если $V(...)$ – прибыль,

$$\max_{\alpha_i}\left\{a \times \max_{\theta_j}\left\{ V\left(\alpha_i,\theta_j\right)\right\} + \left(1-a\right)\min_{\theta_j}\left\{V\left(\alpha_i,\theta_j\right)\right\}\right\}; \qquad (3.13)$$

если $V(...)$ – потери,

$$\min_{\alpha_i}\left\{a \times \min_{\theta_j}\left\{ V\left(\alpha_i,\theta_j\right)\right\} + \left(1-a\right)\max_{\theta_j}\left\{V\left(\alpha_i,\theta_j\right)\right\}\right\}, \qquad (3.14)$$

где a – параметр, с помощью которого учитывается степень оптимизма лица, принимающего решений ($0 \le a \le 1$). Если a=0, то критерий будет самым пессимистическим. Если a=1, то критерий будет самый оптимистический.

При использовании данного критерия для принятия решений основная проблема состоит в том, чтобы обосновать величину параметра a. Для обоснования величины этого параметра можно использовать субъективные вероятности при оценке конкретной ситуации.

3.8. Принятие решений в условиях неопределенности, когда противником является активный противник. Теория игр

Предмет теории игр, ее цели и задачи

Особое место среди явлений или ситуаций, в которых возникает необходимость принятия обоснованных рациональных решений, занимают явления или ситуации, которые характеризуются наличием у участников данной ситуации несовпадающих интересов и различных путей достижения своих целей. Такие явления (ситуации) называются КОНФЛИКТНЫМИ (от латинского conflictus – столкновение).

Конфликт – это ситуация, в которой имеется более одного участника, цели которых не совпадают и действия которых не являются совершенно независимыми.

Для конфликта характерно, что ни один из его участников заранее не знает решений, принимаемых остальными участниками, т.е. вынужден действовать в условиях неопределенности. Неопределенность исходов может проявляться не только в результате сознательных действий других участников, но и как результат действия тех или иных «стихийных сил» (непознанной природы). Важно лишь то, что наличие двух или более сторон с различными целями и возможностями исключает априорную оценку каких-либо вероятностных распределений того или иного исхода, которая тем самым предопределяется конфликтностью явления.

При этом конфликт не обязательно должен пониматься как антагонистический; в качестве конфликта можно рассматривать любое разногласие, любое

несовпадение целей и интересов сторон. Такие конфликтные ситуации, методы обоснования принимаемых сторонами в этих ситуациях решений и являются предметом изучения дисциплины «Теория игр».

Если в других разделах математики, изучающих теорию принятия решений, рассматриваются задачи, когда выбор решения осуществляется одним лицом, то теория игр исследует ситуации, в которых принятие решения зависит от нескольких участников.

Теория игр изучает оптимальное поведение игроков в играх в том или ином смысле с целью выработки рекомендаций для принятия оптимальных решений. Важным инструментом повышения качества таких решений являются научные подходы, основанные на математическом моделировании процессов выбора.

Таким образом, подытожив вышеизложенное, можно дать следующее определение предмета теории игр:

ТЕОРИЯ ИГР – это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта и неопределенности.

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, то есть, определение для них оптимальной стратегии.

Теория игр впервые была систематически изложена Нейманом и Моргенштерном только в 1944 г., хотя отдельные результаты были опубликованы еще в 20-е годы. Нейман и Моргенштерн написали оригинальную книгу, которая содержала, главным образом, экономические примеры, поскольку экономическому конфликту легче всего придать численную форму. Во время второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней математический аппарат для исследования стратегических решений.

Затем главное внимание снова стало уделяться экономическим проблемам. Среди социальных наук аппарат теории игр используется, главным образом, в психологии для анализа торговых сделок и переговоров, а также для изучения принципов формирования коалиций.

В качестве типичного примера конфликтной ситуации, в которой сталкиваются противоречивые неантагонистические интересы сторон, можно привести задачу управления запасами предприятия, где в качестве сторон конфликта, игроков, выступают различные подразделения предприятия.

Производственный отдел заинтересован в возможно более длительном и непрерывном выпуске как можно большими партиями изделий одного наименования, т.е. в узкой номенклатуре выпускаемых изделий: такое производство снижает затраты на переналадку оборудования, на переобучение работников при переходе на выпуск нового изделия и т.д., а следовательно, снижает и общие производственные затраты.

Отдел сбыта заинтересован в больших запасах готовой продукции, чтобы удовлетворить запросы потребителя в любой момент времени. Вместе с тем отдел сбыта, стремясь продать как можно больше продукции, заинтересован в максимально широкой номенклатуре изделий.

Вследствие этого между производственным отделом и отделом сбыта часто возникает конфликт по поводу номенклатуры выпускаемой продукции.

Финансовый же отдел, стремясь минимизировать объем капитала, необходимого для функционирования предприятия, пытается уменьшить количество «связанных» оборотных средств. Поэтому он заинтересован в уменьшении запасов продукции до минимума. Как видим, требования к размерам запасов и к номенклатуре выпускаемой продукции у разных подразделений предприятия оказываются различными, что создает типичную конфликтную ситуацию. Задача состоит в выработке рациональной стратегии и принятии оптимального решения, чтобы наилучшим образом удовлетворить требования сторон, участвующих в конфликте.

К конфликтным ситуациям относятся, например, взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом.

Наконец, прямо противоположные интересы различных сторон явно проявляются в непосредственной борьбе (военной, дипломатической, экономической, спортивной и т.п.).

Во всех этих примерах конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать оптимальные решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени. При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера, и учитывать неизвестные заранее решения, которые эти партнеры будут принимать.

Конфликт может возникнуть также из различия целей, которые отражают не только несовпадающие интересы различных сторон, но и многосторонние интересы одного и того же лица. Например, конструктор обычно преследует многосторонние интересы, согласуя противоречивые технико-экономические требования, предъявляемые к конструкторскому изделию (минимизация габаритов и стоимости, максимизация надежности, обеспечение простоты в изготовлении и т.д.).

Таким образом, единственная общность, которая объединяет все конфликты независимо от их физической и социальной природы, состоит в столкновении интересов нескольких (двух и более) сторон.

Основной аспект этого столкновения состоит в том, что стороны преследуют различные цели, имея для их достижения некоторые наборы альтернатив, каждая из которых приводит к одному исходу(или к одному из нескольких возможных исходов). При этом результат любого мероприятия каждой из сторон зависит от того, какой образ действия выберут другие стороны.

В таком представлении конфликты составляют содержание многих процессов из области экономики, военного дела, социологии, техники, дипломатии, спорта и других видов человеческой деятельности, а также встречаются в природе (например, в условиях межвидовой борьбы за существование).

Основные понятия теории игр

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой, стороны, участвующие в конфликте, – игроками, а исход конфликта – выигрышем или платежом.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется ходом игрока. Ходы могут быть личными и случайными.

Личный ход – это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре). Случайный ход – это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). В дальнейшем мы будем рассматривать только личные ходы игроков.

Естественно, что игрок принимает решения по ходу игры. Однако теоретически можно предположить, что все эти решения приняты игроком заранее. Совокупность этих решений составляет его стратегию.

Стратегией игрока называется некоторый план или совокупность правил, по которым он совершает выбор решения при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Игра может быть определена следующим образом:

1) имеются n конфликтующих сторон (лиц), принимающих решение, интересы которых не совпадают;

2) заданы правила, определяющие выбор допустимых стратегий, известные игрокам;

3) существует точно определенный набор конечных состояний, которыми заканчивается игра (например, выигрыш, ничья, проигрыш);

4) заранее определены и известны всем игрокам платежи, соответствующие каждому возможному конечному состоянию.

Для того, чтобы найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, т.е. один из игроков должен получать максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей наилучшей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей наилучшей стратегии. Такие стратегии называются оптимальными. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию устойчивости, т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

При выборе оптимальной стратегии за основу рассуждений принимается предположение, что противник является, по меньшей мере, таким же разумным, как и мы сами, и делает все для того, чтобы помешать нам добиться своей цели. В теории игр все рекомендации вырабатывают, исходя именно из этих принципов; следовательно, в ней не учитываются элементы риска, неизбежно присутствующие в каждой реальной стратегии, а также возможные просчеты и ошибки каждого из игроков.

Если игра повторяется много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях. В этих случаях оптимальной стратегией называется та стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному

игроку максимально возможный средний выигрыш (или минимально возможный средний проигрыш).

Если игра содержит, кроме личных, случайные ходы, то выигрыш при паре стратегий Ai,Bj есть величина случайная, зависящая от исходов всех случайных ходов. В этом случае естественной оценкой ожидаемого выигрыша является его среднее значение (математическое ожидание).

Классификация игр

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином принципе. В частности:

1) в зависимости от числа игроков различают игры с двумя, тремя и более участниками. Игра называется парной, если в ней участвуют два игрока, и множественной, если число игроков больше двух;

2) по количеству стратегий различают конечные и бесконечные игры. В конечных играх игроки располагают конечным числом возможных стратегий (например, в игре в орлянку игроки имеют по два возможных хода: они могут выбрать «орел» или «решку»). Соответственно, в бесконечных играх игроки имеют бесконечное число возможных стратегий;

3) по свойствам функций выигрыша (платежных функций).

Игры, в которых общая сумма выигрышей игроков равна нулю, т.е. выигрыш одного из игроков равен проигрышу (возможно и поражению) другого, или налицо прямой конфликт между игроками, называются играми с нулевой суммой или антагонистическими играми (например, игры в орлянку или в очко). Антагонистические игры моделируют конфликты двух сторон, интересы которых прямо противоположны; поэтому в антагонистическом конфликте у сторон нет почвы для согласования действий. Исход антагонистической игры оценивается вещественным числом, которое одна из сторон старается максимизировать, другая – минимизировать.

Прямой противоположностью играм такого типа являются игры с ненулевой суммой или неантагонистические игры, которые описывают конфликты, в которых интересы игроков не являются диаметрально противоположными (в частности, эти интересы могут совпадать). В этих играх не исключаются и компромиссные решения.

В играх с ненулевой суммой имеют место, как правило, и конфликты, и согласованные действия игроков. Частным случаем неантагонистических игр являются игры с постоянной разностью, в которых игроки и выигрывают, и проигрывают одновременно, так что им выгодно действовать сообща;

4) в зависимости от возможности предварительной договоренности между игроками различают кооперативные и некооперативные игры. Игра называется кооперативной, если до начала игры игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. Игра, в которой игроки не могут координировать свои стратегии подобным образом, называется некооперативной. Очевидно, что все антагонистические игры могут служить примером некооперативных игр.

5) существуют еще многошаговые игры, моделирующие конфликты сторон, в которых поведение участников конфликта детализируется во времени.

КОНЕЧНЫЕ ПАРНЫЕ ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

Платежная матрица

Некоторые примеры конечных игр

Конечная игра n×m, описанная в нормальной форме, может быть представлена платежной матрицей, приведенной на рис.1.4. Элементами этой матрицы является пара чисел, первое из которых W1ij определяет величину выигрыша игрока 1 (игрока А) при применении этим игроком i-й стратегии, игроком 2 (игроком В) – j-й стратегии.

Второе число W2ij определяет выигрыш игрока 2 (игрока В) при применении игроками тех же стратегий. Для упрощения записи выигрыш игрока А при i-й стратегии игрока А и j-й стратегии игрока В обозначается aij, выигрыш игрока В при тех же стратегиях – bij, сами стратегии записывают в виде Ai и Bj, соответственно.

Как было отмечено в разделе 1.3, существуют игры, в которых общая сумма выигрышей игроков равна нулю, т.е. выигрыш одного из игроков равен проигрышу (возможно и поражению) другого, т.е. налицо прямой конфликт между игроками. Такие игры называются играми с нулевой суммой или антагонистическими играми. В этих играх можно записать aij + bij = 0, то есть aij = – bij .

Рассмотрим парную конечную игру с нулевой суммой. Пусть игрок А располагает n личными стратегиями, которые обозначим A1, A2,..., An, игрок В – m личными стратегиями, обозначим их B1, ..., Bm.

Говорят, что игра имеет размерность n×m. В результате выбора игроками любой пары стратегий Ai и Bj (i = 1,n, j=1,m) однозначно определяется исход игры, т.е. выигрыш aij игрока А (положительный или отрицательный) и проигрыш (–aij) игрока В. Предположим, что значения aij известны для любой пары стратегий (Ai, Bj).

В такой ситуации, если игра представлена в нормальной форме, вполне достаточно исследовать платежную матрицу только игрока А, которая может быть представлена в виде, приведенном в табл. 3.11, либо в виде матрицы A = {aij}, i = 1,n; j = 1,m, элементами которой являются выигрыши aij, соответствующие стратегиям Ai и Bj.

Таблица 3.11

Платежная таблица игры nm Платежная матрица игры n×m

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
.	...	...	...	...	...	...
A_i	A_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{im}
.	...	...	...	...	...	...
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nj}	...	a_{nm}

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix}$$

Рассмотрим несколько элементарных примеров игр.

Пример 1. Составим платежную матрицу для игры «поиск».

Игрок А может спрятаться в одном из двух укрытий (I или II); игрок В ищет игрока А и если найдет, то получает штраф 1 ден. ед. от А, в противном случае платит 1 ден. ед. игроку А.

Необходимо построить платежную матрицу игры.

Решение. Для составления платежной матрицы следует проанализировать поведение каждого из игроков.

Рассмотрим возможные стратегии игроков:

А1 – игрок А прячется в укрытии I;

А2 – игрок А прячется в укрытии II;

В1 – игрок В ищет игрока А в укрытии I;

В2 – игрок В ищет игрока А в укрытии II.

Рассмотрим комбинации стратегий сторон и определим соответствующие выигрыши сторон:

А1–В1 – игрок А прячется в укрытии I и там его обнаруживает игрок В, игрок А платит штраф, т.е. $a11 = -1$.

А1–В2 – игрок А прячется в укрытии I, игрок В ищет его в укрытии II и не находит его там, игрок А получает штраф, т.е. $a12 = 1$.

А2–В1 – игрок А прячется в укрытии II, игрок В ищет его в укрытии I и не находит его там, игрок А получает штраф, т.е. $a21 = 1$.

А2–В2 – игрок А прячется в укрытии II и там его обнаруживает игрок В, игрок А платит штраф, т.е. $a22 = -1$.

Таким образом, для игры «поиск» размера 2×2 получаем платежную матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$$

Пример 2. Два игрока А и В, не глядя друг на друга, кладут настол по монете вверх гербом или цифрой, по своему усмотрению. Если игроки выбрали одинаковые стороны (у обоих герб или цифра), то игрок А забирает обе монеты; иначе их забирает игрок В. Требуется проанализировать игру и составить ее матрицу, считая выигрыш монеты за +1.

Решение. Игра состоит только из двух ходов: наш ход (игрок А) и ход противника (игрок В), оба личные. Игра не принадлежит к играм с полной информацией, так как в момент хода игрок не знает, что сделал другой.

У нас две стратегии: А1 – выбирать герб и А2 – выбирать цифру; у противника такие же две стратегии: В1 – герб и В2 – цифра. Таким образом, данная игра есть игра 2×2.

Матрица игры приведена в табл. 3.12.

Таблица 3.12

B / A	B_1 (г)	B_2(ц)
A_1 (г)	1	–1
A_2 (ц)	–1	1

Таблица 3.13

B / A	B_1	B_2	B_3
A_1	2	–3	4
A_2	– 3	4	–5
A_3	4	–5	6

2.2. Нижняя и верхняя цена игры

Рассмотрим игру n×m с матрицей A = aij , i =1,n; j =1,m; и определим наилучшую среди стратегий A1, A2, ..., An.

Выбирая стратегию Ai, игрок A должен рассчитывать, что игрок B ответит на нее той из стратегий Bj, для которой выигрыш для игрока A минимален (игрок B стремится «навредить» игроку A). Обозначим через αi наименьший выигрыш игрока A при выборе им стратегии Ai для всех возможных стратегий игрока B (наименьшее число в i-й строке платежной матрицы), т.е.

$$\alpha_i = \min_{j=1,m} a_{ij} \ . \qquad (3.13)$$

Игрок A, зная о такой тактике игрока B, стремится выбирать свою стратегию таким образом, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш, т.е. среди всех чисел αi (i=1,n) выберем наибольшее: α = max αi, i =1, n

Следовательно,

$$\alpha = \max_{i=1,n} \min_{j=1,m} a_{ij} \qquad (3.14)$$

Данная наибольшая величина из наименьших значений выигрыша игрока A α называется нижней ценой игры, или максиминным выигрышем (максимином).

Это гарантированный выигрыш игрока A при любой стратегии игрока B.

Стратегия, соответствующая максимину, называется максиминной стратегией.

В то же время игрок A на любую выбранную игроком B стратегию Bj старается ответить такой своей стратегией, чтобы максимизировать проигрыш игрока B (стремится «навредить» игроку B).

Обозначим через βj наибольший проигрыш игрока B (или, что то же самое, наибольший выигрыш игрока A) при выборе игроком B его стратегии Bj для всех возможных стратегий игрока A (наибольшее число в j-м столбце платежной матрицы)

$$\beta_j = \max_{j=1,n} a_{ij} \ . \qquad (3.15)$$

Игрок B, зная о такой тактике игрока A, при выборе своей стратегии стремится поступать таким образом, чтобы минимизировать свой максимальный проигрыш, т.е. среди всех чисел βj (j=1,m) выберем наименьшее:

$$\beta = \min_{j=1,m} \beta_j \ .$$

Следовательно,

$$\beta = \min_{j=1,m} \max_{i=1,n} a_{ij} \, . \qquad (3.16)$$

Эта величина β называется верхней ценой игры или минимаксным выигрышем (минимаксом). Это гарантированный проигрыш игрока B. Стратегия, соответствующая минимаксу, называется минимаксной стратегией.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий, называется принципом минимакса. Этот принцип следует из разумного предположения, что каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели противника, и гарантирует игроку A выигрыш не менее максиминного выигрыша, а игроку B – проигрыш не более минимаксного.

Пример 3. Определим нижнюю и верхнюю цены игры и соответствующие стратегии в задаче 2.4. Рассмотрим платежную матрицу.

Таблица 3.14

A \ B	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,9	0,4	0,2	0,2
A_2	0,3	0,5	0,8	0,3
A_3	0,5	0,6	0,2	0,2
β_j	0,9	0,6	0,8	α=0,3 β=0,7

При выборе стратегии A1 (первая строка матрицы) минимальный выигрыш игрока A равен α1 = min (0,9; 0,4; 0,2) = 0,2 и соответствует стратегии B3 игрока B. При выборе стратегии A2 (вторая строка матрицы) минимальный выигрыш равен α2 = min (0,3; 0,6; 0,8) = 0,3, он достигается при стратегии B1. При выборе стратегии A3 (третья строка матрицы) минимальный выигрыш равен α3 = min (0,5; 0,7; 0,2) = 0,2, он достигается при стратегии B3.

Нижняя цена игры α = max (α1, α 2, α3) = max (0,2; 0,3; 0,2) = 0,3, т.е., гарантируя себе максимальный выигрыш при любой стратегии игрока B, игрок A должен выбрать стратегию A2, т.е. A2 является наиболее осторожной (максиминной) стратегией игрока A. Пользуясь этой стратегией, он гарантирует себе, что будет поражать самолеты в среднем не менее, чем 0,3 (30 %) всех случаев.

Рассмотрим возможные стратегии игрока B. Выбирая стратегию B1 (первый столбец таблицы), игрок B понимает, что игрок A ответит стратегией A1, чтобы максимизировать свой выигрыш (проигрыш игрока B). Следовательно, максимальный проигрыш игрока B при выборе им стратегии B1 равен β1 = max

(0,9; 0,3; 0,5) = 0,9. Аналогично, максимальный проигрыш игрока В (выигрыш А) при выборе им стратегии В2 (второй столбец) равен $\beta 2 = \max$ (0,4; 0,5; 0,6) = 0,6. При выборе стратегии В3 максимальный проигрыш игрока В равен $\beta 3 = \max$ (0,2; 0,8; 0,2) = 0,8.

Верхняя цена игры $\beta = \min$ (0,9; 0,6; 0,8) = 0,6. Наиболее осторожной (минимаксной) стратегией игрока В является В2. Применяя этот самолет, противник может быть уверен, что он будет поражаться не более, чем в 0,6 (60 %) всех случаев.

Нетрудно заметить, что в проведенном анализе каждая из сторон была ориентирована на худшую с ее точки зрения ситуацию – минимальный выигрыш или максимальный проигрыш при любой фиксированной стратегии. Обе стороны должны были улучшить, насколько возможно, свое положение, выбирая максиминную и минимаксную стратегии с целью ослабить (и даже исключить) зависимость получаемых результатов от действий противника. В этом находит свое выражение принцип гарантированного результата, предполагающего, как было замечено, отсутствие риска и связанных с ним нежелательных последствий.

На этом примере удобно продемонстрировать одно важное свойство минимаксных стратегий – их неустойчивость. Пусть мы (игрок А) применяем свою наиболее осторожную (максиминную) стратегию А2, а противник – свою наиболее осторожную (минимаксную) стратегию В2. До тех пор, пока оба противника придерживаются этих стратегий, средний выигрыш равен 0,5; он больше нижней, но меньше верхней цены игры. Теперь допустим, что противнику стало известно, что мы применяем стратегию А2; он немедленно ответит на нее стратегией В1 и сведет выигрыш к 0,3. В свою очередь, на стратегию В1 у нас есть хороший ответ: стратегия А1, дающая нам выигрыш 0,9 и т.д.

Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

Проблема равновесия в игре

В задаче 2.5, рассмотренной выше, верхняя и нижняя цены игры различны: $\alpha \neq \beta$. Такие игры, как убедились, являются неустойчивыми.

Существует класс игр, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней, то есть $\alpha = \beta$.

Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то их общее значение называется чистой ценой игры, или ценой игры, и обозначают греческой буквой ν (нью). Минимаксные стратегии, соответствующие цене игры, являются оптимальными стратегиями, а их совокупность – оптимальным решением, или решением игры.

В этом случае игрок А получает максимальный гарантированный (не зависящий от поведения игрока В) выигрыш ν, а игрок В добивается минимального гарантированного (вне зависимости от поведения игрока А) проигрыша ν.

Пара чистых стратегий Ai и Bj дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент aij является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

В геометрии точку на поверхности, обладающую аналогичным свойством (одновременный минимум по одной координате и максимум по другой), называют седловой точкой; (по аналогии с поверхностью седла, которая искривляется вверх в одном направлении и вниз – в другом). Этот термин применяется и в теории игр. Элемент матрицы, обладающий этим свойством, называется седловой точкой матрицы, а про игру говорят, что она имеет седловую точку.

Обозначим A* и B* – пару чистых стратегий, на которых достигается решение игры в задаче с седловой точкой. Введем функцию выигрыша первого игрока на каждой паре стратегий: P(Ai,Bj)=aij. Тогда из условия оптимальности в седловой точке выполняется двойное неравенство:

$P(Ai,B^*) \le P(A^*,B^*) \le P(A^*,Bj)$,

которое справедливо для всех i= 1, n, j= 1, m.

Это утверждение легко проверить на примере игры с седловой точкой.

Пример 4. Определить нижнюю и верхнюю цену игры, заданной платежной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}75 \end{Vmatrix}$$

Имеет ли игра седловую точку?

Решение. Все расчеты удобно проводить в таблице, в которой, кроме матрицы A, введены столбец αi , и строка βj (табл. 3.15). Анализируя строки матрицы (стратегии игрока A), заполняем столбец αi : α1 = 0,5, α2 = 0,6, α3 = 0,7 – минимальные числа в строках 1, 2, 3. Аналогично βj = 0,9, β2 = 0,7, β3 = 0,8 – максимальные числа в столбцах 1, 2, 3, соответственно.

Таблица 3.15

A \ B	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,7	0,5
A_2	0,9	0,6	0,8	0,6
A_3	0,8	0,7	0,75	0,7
β_j	0,9	0,7	0,8	α=0,7 β=0,7

Нижняя цена игры α = max, αi = max (0,5; 0,6; 0,7) = 0,7 (наибольшее число в столбце αi) и верхняя цена игры β = min, βj = min (0,9; 0,7; 0,8) = 0,7 (наименьшее число в строке βj). Эти значения равны, т.е. α = β, и достигаются на одной и той же паре стратегий (A3, B2). Следовательно, игра имеет седловую точку A3, B2) и цена игры ν = 0,7.

В случае игры с седловой точкой минимаксные стратегии обладают своеобразной «устойчивостью»: если одна сторона придерживается своей минимаксной стратегии, то для другой может быть только невыгодным отклоняться от своей. Заметим, что в этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. Любое отклонение от оптимальной стратегии приводит отклоняющегося игрока к невыгодным последствиям, вынуждающим его вернуться в исходное положение.

Положение, при котором ни одна из сторон не имеет никаких разумных оснований для изменения своей стратегии, называется ситуацией равновесия.

В играх с седловой точкой такая ситуация возникает и сохраняется сколь угодно долго, если стороны А и В используют соответствующие стратегии, называемые в этом случае чистыми стратегиями.

Итак, для каждой игры с седловой точкой существует решение, определяющее пару оптимальных стратегий обеих сторон, отличающуюся следующими свойствами:

1) если обе стороны придерживаются своих оптимальных стратегий, то средний выигрыш равен чистой цене игры, одновременно являющейся ее нижней и верхней ценой;

2) если одна из сторон придерживается своей оптимальной стратегии, а другая отклоняется от своей, то от этого отклоняющаяся сторона может только потерять и ни в коем случае не может увеличить свой выигрыш.

Класс игр, имеющих седловую точку, представляет большой интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения.

В теории игр доказывается следующая теорема:

Теорема 3.1. Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку и, следовательно, каждая такая игра имеет решение, т.е. существует пара оптимальных стратегий той и другой стороны, дающая средний выигрыш, равный цене игры.

Могут встретиться случаи, когда платежная матрица имеет несколько седловых точек, однако это не изменит характера рекомендуемых решений.

Смешанные стратегии

На практике наиболее распространенным является случай, когда платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha \neq \beta$. Ситуации, которые могут при этом возникнуть, мы рассмотрели в задаче 3. Анализируя матрицы таких игр, пришли к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь своей максиминной стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α, если при-

менять не одну единственную чистую стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий?

Кроме того, как отмечено выше, игры в чистых стратегиях часто оказываются неустойчивыми в случае информированности сторон о действиях друг друга.

В таких ситуациях каждой стороне необходимо как-то скрыть свое поведение от противника, чтобы ослабить влияние информационного фактора и получить желаемое преимущество. Это трудно осуществить, ориентируясь только на разумный выбор конкретных стратегий, так как любые рассуждения могут быть воспроизведены противником. В то же время полный отказ от рационального начала и переход, например, к бессистемному поиску вариантов решений означал бы прекращение игры как таковой и замену ее неуправляемым случайным процессом.

Приемлемый компромисс достигается здесь путем обоснованного, разумного введения элемента случайности в действия сторон так, что каждый отдельный ход остается непредсказуемым, но вся совокупность ходов обладает вполне определенными, заранее заданными свойствами. Другими словами, участники конфликта чередуют (смешивают) в случайном порядке свои стратегии в соответствии со специально разработанной схемой, обеспечивающей нужную частоту (вероятность) реализации каждой из A1, A2,...,An; B1, B2,...,Bm стратегий.

Комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, называются смешанными стратегиями.

Смешанные стратегии игроков обозначают Sa, Sb.

Говоря языком теории вероятностей, можно ситуацию сформулировать следующим образом. Пусть aij – матрица игры размера n×m.

Если pi – вероятность появления события Ai (события, состоящего в том, что игрок A выберет стратегию Ai), то можно говорить о распределении вероятностей на множестве стратегий стороны A, причем всегда

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad (3.17)$$

то есть событие, состоящее в реализации некоторой допустимой стратегии на очередном ходе, является достоверным.

Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, в которой все стратегии, кроме одной, применяются с нулевыми частотами (вероятностями), а данная – с частотой (или вероятностью), равной 1.

Оказывается, что, применяя не только чистые, но и смешанные стратегии, можно для каждой конечной игры получить решение, т.е. пару таких (в общем случае смешанных) стратегий, что при применении их обоими игроками выигрыш будет равен цене игры, а при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может изменяться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося.

Высказанное утверждение составляет содержание так называемой теоремы о минимаксе – основной теоремы теории игр, доказанной фон Нейманом в

1928 году. Известные доказательства теоремы весьма сложны, поэтому приведем только ее формулировку:

В конечной игре двух лиц с нулевой суммой и полной информацией имеется, по крайней мере, одно решение в области смешанных стратегий, то есть имеет место равенство Pa= Pb при $\alpha \neq \beta$.

Теорема о минимаксе указывает на существование ситуации равновесия для случая $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, оптимальных стратегий S*a, S*b, т.е. решений игры, позволяющих добиваться среднеожидаемого выигрыша ν = Pa = Pb. Величина ν называется ценой игры. Из приведенных выше оценок следует

$$\alpha \leq \nu \leq \beta. \qquad (3.18)$$

Действительно, α есть минимальный гарантированный выигрыш, который мы можем себе обеспечить, применяя только свои чистые стратегии. Так как смешанные стратегии включают в себя в качестве частного случая и все чистые, то, допуская, кроме чистых, еще и смешанные стратегии, мы, во всяком случае, не ухудшаем своих возможностей, следовательно, $\nu \geq \alpha$.

Аналогично противник, применяя чистые и смешанные стратегии, не увеличивает свой проигрыш, т.е. $\nu \leq \beta$, откуда следует неравенство (3.18).

Введем специальное обозначение для смешанных стратегий.

Смешанной стратегией Sa игрока A называется применение чистых стратегий A1, A2,..., Ai,..., An с вероятностями p1, p2,..., pi,...,pn, причем сумма вероятностей равна 1, то есть $\sum$ in = 1 pi = 1 . Смешанная стратегия игрока A записывается в виде матрицы

$$S_a = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{Vmatrix}$$

или в виде строки Sa = (p1, p2,..., pi,..., pn,). Аналогично, смешанная стратегия игрока B обозначается:

$$S_b = \begin{Vmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_m \end{Vmatrix} \text{ или } S_b=(q_1, q_2, \dots q_j, \dots q_m),$$

где сумма вероятностей появления стратегий равна 1, то есть

$$\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

Пусть S*a = (p*1, p*2, ..., p*n) и S*b = (q*1, q*2, ..., q*m) – пара оптимальных стратегий. В общем случае не все чистые стратегии, доступные данному игроку, входят в его оптимальную смешанную стратегию, а только некоторые. Чистые стратегии, входящие в оптимальную смешанную стратегию игрока с

отличной от нуля вероятностью, называются его активными или полезными стратегиями.

Оказывается, что решение игры обладает еще одним замечательным свойством, сформулированным в теореме об активных стратегиях:

Теорема 3.2. Если один из участников игры придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то ожидаемый выигрыш останется неизменным и равным ν независимо от характера действий другого участника в пределах его активных стратегий.

Противник при этом, например, может пользоваться любой из своих активных (полезных) стратегий в чистом виде, а также может смешивать их в любых пропорциях.

Теорема имеет большое практическое значение – она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ИГР В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Постановка вопроса

Если игра n×m не имеет седловой точки, то нахождение решения вообще довольно трудная задача, особенно при больших n и m.

Иногда эту задачу удается упростить, предварительно уменьшив число стратегий путем вычеркивания некоторых излишних.

Излишние стратегии бывают: а) дублирующие и б) заведомо невыгодные.

Рассмотрим, например, игру с матрицей:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_2	0	2	3	2
A_3	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Нетрудно убедиться, что стратегия А3 в точности повторяет (дублирует) стратегию А1, поэтому любую из этих двух стратегий можно вычеркнуть. Далее, сравнивая почленно строки А1 и А2, видим, что каждый элемент строки А2 меньше (или равен) соответствующего элемента строки А1. Очевидно, что мы никогда не должны пользоваться стратегией А2, она является заведомо невыгодной. Вычеркивая А3 и А2, приводим матрицу к более простому виду:

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	4	3
A_4	4	3	1	0

Далее замечаем, что для противника стратегия B3 заведомо невыгодна; вычеркивая ее, приводим матрицу к окончательному виду:

A \ B	B_1	B_2	B_4
A_1	1	2	3
A_4	4	3	0

Таким образом, игра 4×4 вычеркиванием дублирующих и заведомо невыгодных стратегий сведена к игре 2×3.

Процедура вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий всегда должна предшествовать решению игры.

Игры 2×2 и 2×m являются наиболее простыми случаями конечных игр, которые всегда можно решить элементарными способами.

Аналитический метод решения игры 2×2, 2×m и n×2

Пусть игра 2×2 задана платежной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

Пусть седловой точки нет и, следовательно, нижняя цена игры не равна верхней: $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальную смешанную стратегию игрока А

$$S_a^* = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ p^*_1 & p^*_2 \end{Vmatrix}$$

Она отличается тем свойством, что, каковы бы ни были действия противника (если только он не выходит за пределы своих полезных (активных) стратегий), выигрыш будет равен цене игры ν. В игре 2×2 обе стратегии противника являются полезными, иначе игра имела бы решение в области чистых стратегий (седловую точку). Значит, если мы придерживаемся своей оптимальной стратегии S*a, то противник может пользоваться любой из своих чистых стратегий B1, B2, не изменяя среднего выигрыша ν. То есть если игрок B использует чис-

тую стратегию B1 (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы), выигрыш игрока A, применяющего смешанную стратегию, равен цене игры ν:

$a11 \cdot p1^* + a21 \cdot p2^* = \nu$.

Тот же средний выигрыш получает игрок A, если 2-й игрок применяет стратегию B2, т.е. $a12 \cdot p^*1 + a22 \cdot p^*2 = \nu$. Учитывая, что $p1^* + p2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии S*a и цены игры ν:

$$a11 \cdot p^*1 + a21 \cdot p^*2 = \nu ,$$

$$a12 \cdot p^*1 + a22 \cdot p^*2 = \nu , \qquad (3.19)$$

$$p^*1 + p^*2 = 1 .$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (3.20)$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

и цену игры

$$\nu = \frac{a_{22} \times a_{11} - a_{12} \times a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (3.21)$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании S*b – оптимальной стратегии игрока B, получаем, что при любой чистой стратегии игрока A (A1 или A2) средний проигрыш игрока B равен цене игры ν, т.е.

$$a_{11} \cdot q^*_1 + a_{12} \cdot q^*_2 = \nu , \qquad (3.22)$$

$$a_{21} \cdot q^*_1 + a_{22} \cdot q^*_2 = \nu ,$$

$$q^*_1 + q^*_2 = 1 .$$

Тогда оптимальная стратегия S*b (q*1, q*2) определяется формулами:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad (3.23)$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

Графический метод решения игр

Решение игры 2×2 допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть игра задана матрицей A= aij , i,j=1,2, приведенной ниже

A \ B	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Возьмем участок оси абсцисс длиной 1 (как сумма вероятностей p1+p2=1) – рис. 3.6. Левый конец участка (точка с абсциссой x=0) будет изображать стратегию A1, правый конец участка (x=1) – стратегию A2.

Проведем через точки A1 и A2 два перпендикуляра к оси абсцисс: ось I-I и ось II-II. На оси I-I будем откладывать выигрыши при стратегии A1, на оси II-II – выигрыши при стратегии A2. Рассмотрим стратегию противника B1; она дает две точки на осях I-I и II-II с ординатами, соответственно, a11 и a21. Проведем через эти точки прямую B1-B1.

Очевидно, если мы будем применять смешанную стратегию

$$S_a = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{Vmatrix},$$

а игрок B – чистую стратегию B1, то наш средний выигрыш, равный a11·p1 + a21·p2, изобразится точкой M на прямой B1-B1; абсцисса этой точки равна p2. Прямую B1-B1, изображающую выигрыш при стратегии B1, условно будем называть «стратегией B1».

Очевидно, точно таким же способом может быть построена и стратегия B2 (рис. 3.7).

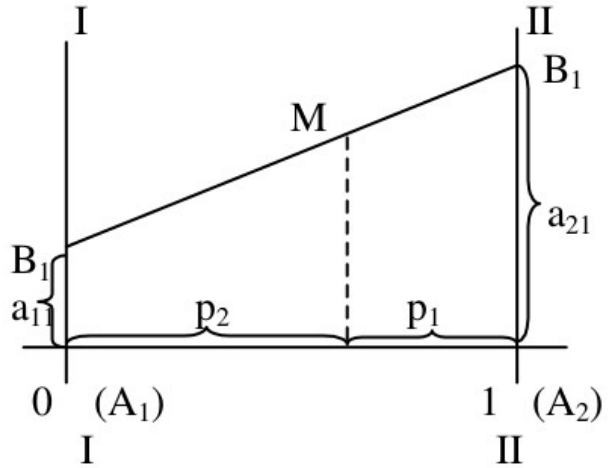


Рис. 3.6

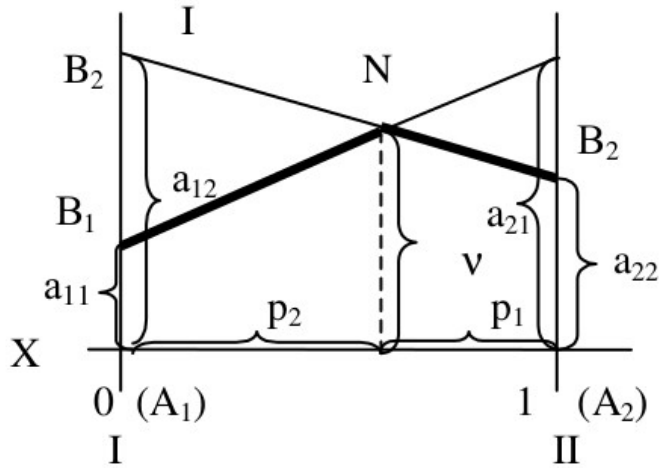


Рис. 3.7

Нам нужно найти оптимальную стратегию S*a, т.е. такую, для которой минимальный выигрыш (при любом поведении B) обращался бы в максимум. Для этого построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях B1, B2, то есть ломаную B1-N-B2, отмеченную на рис. 3.7 жирной линией. Эта нижняя граница будет выражать минимальный выигрыш игрока A при любых смешанных его стратегиях; точка N, в которой этот минимальный выигрыш достигает максимума, и определяет решение и цену игры. Нетрудно убедиться, что ордината точки N есть цена игры ν, а ее абсцисса равна p*2 – частоте применения стратегии A2 в оптимальной смешанной стратегии S*a.

Геометрическая интерпретация дает возможность представить наглядно также нижнюю и верхнюю цену игры.

В нашем случае решение игры определялось точкой пересечения стратегий. Однако это не всегда будет так; на рис. 3.8 показан случай, когда, несмотря на наличие пересечения стратегий, решение дает для обоих игроков чистые стратегии (A2 и B2), а цена игры ν= a22.

В данном случае матрица имеет седловую точку, и стратегия A1 является заведомо невыгодной, т.к. при любой чистой стратегии противника она дает меньший выигрыш, чем A2.

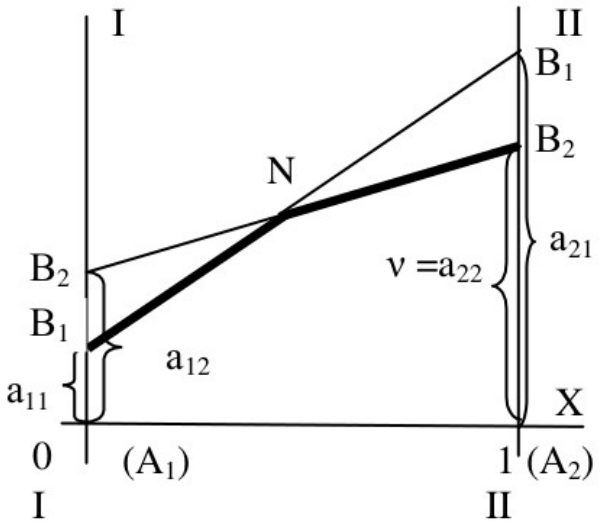


Рис. 3.8

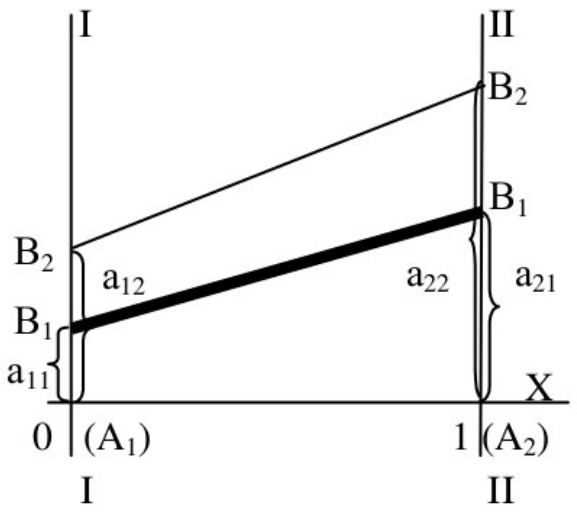


Рис. 3.9

В случае, когда заведомо невыгодная стратегия имеется у противника, геометрическая интерпретация имеет вид, представленный на рис. 3.9. В данном случае нижняя граница выигрыша совпадает со стратегией B1; стратегия B2 для противника является заведомо невыгодной.

Пусть мы располагаем двумя стратегиями A1, A2, а противник – m стратегиями: B1, B2, ..., Bm. Матрица aij задана; она состоит из двух строк и m столбцов. Аналогично случаю двух стратегий дадим задаче геометрическую интерпретацию; m стратегий противника изобразятся m прямыми (рис. 3.10).

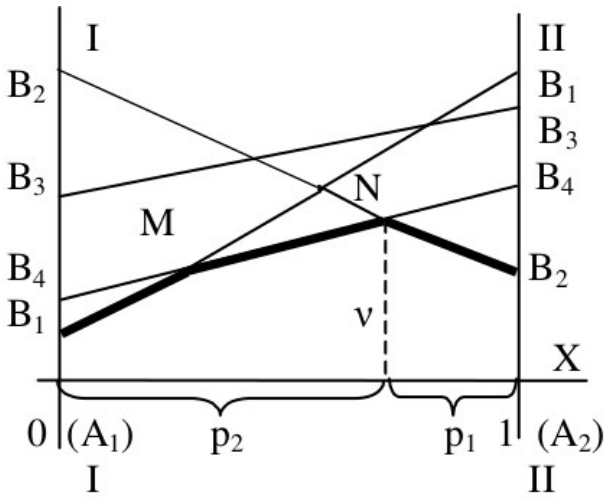


Рис. 3.10

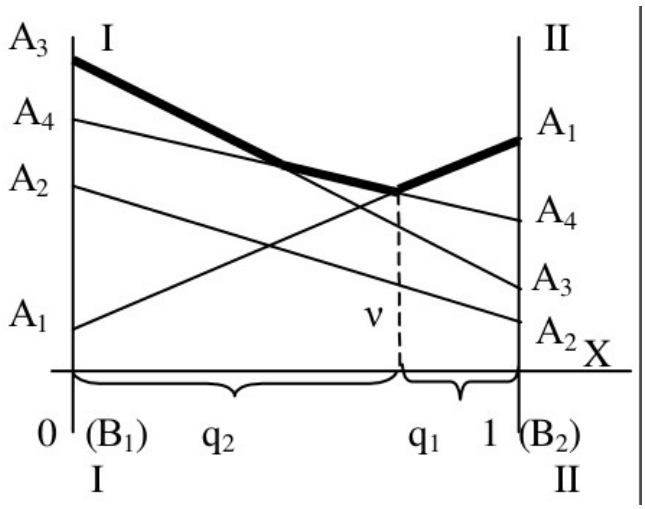


Рис. 3.11

Строим нижнюю границу выигрыша (ломаную B1MNB2) и находим на ней точку N с максимальной ординатой. Эта точка дает решение игры (стратегию)

$$S^*_a = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ p^*_1 & p^*_2 \end{Vmatrix} .$$

Координата точки N равна цене игры ν, а абсцисса равна частоте p*2 стратегии A2. В данном случае оптимальная стратегия противника получается применением смеси двух полезных (активных) стратегий: B2 и B4, пересекающихся в точке N. Стратегия B3 является заведомо невыгодной, а стратегия B1 – невыгодной при оптимальной стратегии S*a.

Если A будет придерживаться своей оптимальной стратегии, то выигрыш не изменится, какой бы из своих полезных стратегий не пользовался B, однако он изменится, если B перейдет к стратегиям B1 или B3.

Пользуясь геометрической интерпретацией, можно дать простой способ решения любой игры 2×m. Непосредственно по чертежу находим пару полезных стратегий противника Bj и Bk, пересекающихся в точке N (если в точке N пересекаются более двух стратегий, берем любые две из них). Мы знаем, что если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии, то выигрыш не зависит от того, в какой пропорции применяет B свои полезные стратегии, следовательно,

$$a_{1j} \cdot p_1 + a_{2j} \cdot p_2 = \nu ,$$
$$a_{1k} \cdot p_1 + a_{2k} \cdot p_2 = \nu .$$

Из этих уравнений и условия p2 =1 – p1 находим p1, p2 и цену игры.

Зная цену игры, можно определить оптимальную стратегию игрока B:

$$S^*_b = \begin{Vmatrix} B_j & B_k \\ q_j & q_k \end{Vmatrix}$$

Для этого решается, например, уравнение: qj·a1j + qk·a1k = ν, где

$$qj + qk = 1.$$

В случае, когда мы располагаем n стратегиями, а противник – всего двумя, задача решается совершенно аналогичным способом: заменяя знак выигрыша на обратный, можно превратить игрока А из «выигрывающего» в «проигрывающего». Можно решить задачу и без перемены знака выигрыша; тогда задача решается непосредственно для В, но строится не нижняя, а верхняя граница выигрыша (рис. 3.11).

На границе ищется точка N с минимальной ординатой, которая и есть цена игры ν.

Решение игры симплекс-методом

Для решения игры в смешанных стратегиях необходимо, чтобы все элементы платежной матрицы были положительными. Если есть отрицательные элементы, то можно избавиться от них, прибавив ко всем элементам большое число M (a_{ij} + M), а после решения игры цену снизить на эту же величину (V - M).

Если все элементы платежной матрицы положительны, то и цена игры будет положительна.

Итак, необходимо найти решение игры, т.е. две оптимальных смешанных стратегий и , которые дают максимальную возможность среднего выигрыша (игрок А) и минимальную возможность среднего проигрыша (игрок В).

Рассмотрим поиск оптимальных стратегий для игрока А. Так как игрок А, применяя свою стратегию, не мог сделать свой выигрыш меньше цены игры при любых стратегиях, выбранных вторым игроком, то можно записать следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq V \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq V \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_n \geq V \end{cases} \qquad (3.24)$$

Левую и правую части делят на положительную величину V:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{p_1}{V} + a_{21}\dfrac{p_2}{V} + \ldots + a_{m1}\dfrac{p_m}{V} \geq 1 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{1n}\dfrac{p_1}{V} + a_{2n}\dfrac{p_2}{V} + \ldots + a_{mn}\dfrac{p_n}{V} \geq 1 \end{cases} \qquad (3.25)$$

Вводят обозначения

$$\frac{p_1}{V} \to x_1 \quad \frac{p_2}{V} \to x_2 \ \ldots \ \frac{p_m}{V} \to x_m$$

тогда система неравенств примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m\,1}\dfrac{p_m}{V} \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\dfrac{p_1}{V} + a_{2n}\dfrac{p_2}{V} + \ldots + a_{m\,n}\dfrac{p_n}{V} \geq 1 \end{cases} \qquad (3.26)$$

$$x_i \geq 0$$

Так как $x_i = \frac{p_i}{V}$, а $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V}$, где V – гарантированный выигрыш первого игрока (А).

Так как V должно быть максимальным, то $\frac{1}{V}$ – минимальным.

После определения значения x_i-го находятся вероятности и цена игра и соответственно оптимальная стратегия.

Для игрока В задача ЛП будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & Z(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max \\ & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1 \\ & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ & a_{m\,1}y_1 + a_{m\,2} + \ldots + a_{m\,n}y_n \leq 1 \\ & y_j \geq 0 \qquad y_j = \frac{q_j}{V} \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Эта задача двойственная по отношению к первой задаче. Так как min f = max z , то будут получены одинаковые цены игры.

3.9. Модель Леонтьева

Есть n отраслей. Рассматривается процесс производства за один год. Пусть x_i – общий (валовой) объем продукции i-й отрасли, x_{ij} – объем продукции i-й отрасли, потребляемый j-й отраслью в процессе производства, y_i – объем конечной продукции i-й отрасли для непроизводственного потребления. Имеют место соотношения баланса

$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$, i=1, … , n (продукция i-й отрасли используется другими отраслями и потребителями).

Коэффициенты прямых затрат $a_{ij} = x_{ij}/x_j$ показывают затраты продукции i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли.

Считаем, что a_{ij} = const. Тогда $x_{ij} = a_{ij}x_j$ и $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i$, i=1, …, n.

Введем следующие обозначения: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор валового выпуска,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица прямых затрат (структурная матрица),

$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ – вектор конечного продукта.

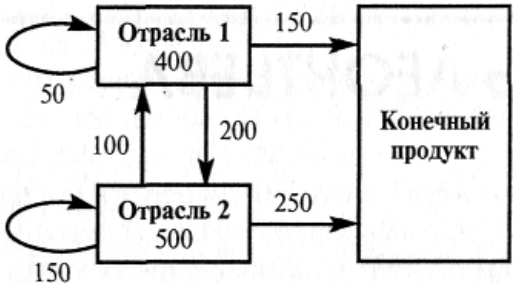
Получаем матричное уравнение

$$X = AX + Y. \qquad (3.28)$$

Матрица A ≥ 0 (все элементы неотрицательны) называется продуктивной, если для любого вектора Y ≥ 0 существует решение X ≥ 0 этого уравнения. В этом случае и модель Леонтьева называется продуктивной.

Утверждение. Матрица A ≥ 0 продуктивна, если $\max_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$ и существует j такой, что $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$, то есть наибольшая из сумм элементов в столбцах матрицы A не превосходит 1, причем есть хотя бы один столбец, где сумма меньше 1.

Пример



Имеем x_1 = 400, x_2 = 500, y_1 = 150, y_2 = 250, x_{11} = 50, x_{12} = 200, x_{21} = 100, x_{22} = 150.

Отсюда $a_{11} = x_{11}/x_1$ = 50/400 = 0,125, $a_{12} = x_{12}/x_2$ = 200/500 = 0,4, $a_{21} = x_{21}/x_1$ = 100/400 = 0,25, $a_{22} = x_{22}/x_2$ = 150/500 = 0,3.

Структурная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,125 & 0,4 \\ 0,25 & 0,3 \end{pmatrix}$. Тогда max(0,125+0,25; 0,4+0,3)=0,7<1 Матрица A продуктивна.

X= AX+ Y. Пусть новый вектор валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix}$.

Тогда соответствующий вектор конечного продукта Y= X–AX=EX–AX=(E–A)X=

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,125 & 0,4\\ 0,25 & 0,3\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}300\\ 450\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0,125 & 0-0,4\\ 0-0,25 & 1-0,3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300\\ 450\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,875 & -0,4\\ -0,25 & 0,7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}300\\ 450\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,875\cdot 300 & (-0,4)\cdot 450\\ (-0,25)\cdot 300 & 0,7\cdot 450\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}82,5\\ 240\end{pmatrix}$$

Замечание. Математическая функция МУМНОЖ мастера функций пакета Excel позволяет быстро перемножить матрицы. Перед вызовом этой функции надо выделить мышкой диапазон ячеек нужного размера, куда после выполнения процедуры будет помещен ответ. Вставка/ Функция/ Математические/ МУМНОЖ/ ОК. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графах массив 1 и массив 2 указывается ссылка на ячейки, содержащие значения 1-го и 2-го матричных множителей соответственно. После этого нажимается не ОК, а одновременная комбинация клавиш Ctrl + Shift + Enter.

Пусть новый вектор конечного продукта $Y=\begin{pmatrix}200\\ 300\end{pmatrix}$.

Найдем соответствующий вектор валового выпуска X (это можно сделать, так как матрица A продуктивна).

Y = (E–A)X. Тогда X = $(E–A)^{-1}$Y. Матрица $(E–A)^{-1}$ называется матрицей полных затрат.

$$E-A=\begin{pmatrix}0,875 & -0,4\\ -0,25 & 0,7\end{pmatrix}$$

Вспомним, что обратная матрица для матрицы $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ вычисляется по формуле: $B^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$.

Тогда $X=(E-A)^{-1}Y=\dfrac{1}{0,875\cdot 0,7-(-0,25)\cdot(-0,4)}\cdot\begin{pmatrix}0,7 & 0,4\\ 0,25 & 0,875\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\ 300\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{0,5125}\cdot\begin{pmatrix}260\\ 312,5\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}507\\ 610\end{pmatrix}.$$

Замечание. Математическая функция МОБР мастера функций пакета Excel позволяет быстро найти обратную матрицу. Перед вызовом этой функции надо выделить мышкой диапазон ячеек нужного размера (порядок обратной матрицы равен порядку исходной матрицы), куда после выполнения процедуры будет помещен ответ. Вставка/ Функция/ Математические/ МОБР/ ОК. Появляется диалоговое окно, которое нужно заполнить. В графе массив указывается ссылка на ячейки, содержащие элементы исходной матрицы. После этого нажимается не ОК, а одновременная комбинация клавиш Ctrl + Shift + Enter.

3.10. Кластерный анализ

Кластерный анализ позволяет из n объектов, характеризуемых k признаками, сформировать разбивку на однородные группы (кластеры). Однородность объектов определяется по расстоянию $p(x_i, x_j)$, где $x_i = (x_{i1}, ..., x_{ik})$ и $x_j = (x_{j1}, ...,$

x_{jk}.) – векторы, составленные из значений k признаков i-го и j-го объектов соответственно.

Для объектов, характеризуемых числовыми признаками, расстояние определяется по следующей формуле:

$$\rho(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{m=1}^{k} (x_{im} - x_{jm})^2} \qquad (3.29)$$

Объекты считаются однородными, если $p(x_i, x_j) < p_{предельного}$.

Графическое изображение объединения может быть получено с помощью дерева объединения кластеров – дендрограммы.

Пример. Пять производственных объектов характеризуются двумя признаками: объемом продаж и среднегодовой стоимостью основных производственных фондов.

Таблица 3.16

Исходные данные

Объект	1	2	3	4	5
Объем продаж	1	3	6	13	12
Среднегодовая стоимость основных производственных фондов	9	10	8	5	7

Проведем классификацию этих объектов с помощью принципа «ближайшего соседа». Найдем расстояния между объектами по формуле

$$\rho(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{m=1}^{k} (x_{im} - x_{jm})^2} \ .$$

Заполним таблицу.

Таблица 3.17

Расчетная таблица 1

Объекты	1	2	3	4	5
1	0	2,24	5,10	12,65	11,18
2		0	3,61	11,18	9,49
3			0	7,62	6,08
4				0	2,24
5					0

Поясним, как заполняется таблица.

На пересечении строки «i» и столбца «j» указано расстояние $p(x_i, x_j)$ (результат округляем до двух цифр после запятой). Например, на пересечении строки «1» и столбца «3» указано расстояние $\rho(x_1, x_3) = \sqrt{(1-6)^2 + (9-8)^2} \approx 5{,}10$, а на пересечении строки «3» и столбца «5» указано расстояние $\rho(x_3, x_5) = \sqrt{(6-12)^2 + (8-7)^2} \approx 6{,}08$.

Так как $p(x_i, x_j) = p(x_j, x_i)$, то нижнюю часть таблицы можно не заполнять.

Применим принцип «ближайшего соседа». Находим в таблице наименьшее из расстояний (если таких несколько, то выберем любое из них). Это $p_{1,2} = p_{4,5} = 2{,}24$.

Пусть $p_{min} = p_{4,5} = 2,24$. Тогда мы можем объединить в одну группу объекты 4 и 5, то есть в объединенном столбце «4 и 5» будет наименьшее из соответствующих чисел столбцов «4» и «5» первоначальной таблицы расстояний. Аналогично поступаем и со строками «4» и «5».

Получим новую таблицу.

Таблица 3.18

Расчетная таблица 2

Объекты	1	2	3	4и5
1	0	2,24	5,10	11,18
2		0	3,61	9,49
3			0	6,08
4и5				0

Находим в полученной таблице наименьшее из расстояний (если таких несколько, то выберем любое из них): $p_{min} = p_{1,2} = 2,24$. Тогда мы можем объединить в одну группу объекты 1 и 2, то есть в объединенном столбце «1 и 2» будет наименьшее из соответствующих чисел столбцов «1» и «2» предыдущей таблицы расстояний. Аналогично поступаем и со строками «1» и «2».

Получим новую таблицу.

Таблица 3.19

Расчетная таблица 2

Объекты	1 и 2	3	4 и 5
1 и 2	0	3,61	9,49
3		0	6,08
4 и 5			0

Находим в полученной таблице наименьшее из расстояний (если таких несколько, то выберем любое из них): $p_{min} = p_{1,2,3} = 3,61$. Тогда мы можем объединить в одну группу объекты 1, 2, 3, то есть в объединенном столбце «1, 2, 3» будет наименьшее из соответствующих чисел столбцов «1 и 2» и «3» предыдущей таблицы расстояний. Аналогично поступаем и со строками «1 и 2» и «3».

Получим новую таблицу.

Таблица 3.20

Расчетная таблица 2

Объекты	1,2.3	4,5
1,2,3	0	6,08
4,5		0

Мы получили два кластера: (1, 2, 3) и (4, 5).

На дендрограмме (рис. 3.12) указаны порядок выбора элементов и соответствующие минимальные расстояния p_{min}.

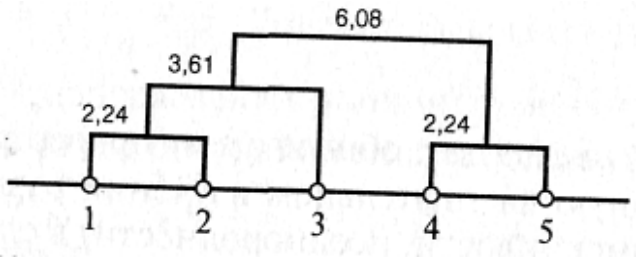


Рис. 3.12. Дендрограмма

Провести классификацию этих объектов с помощью принципа «ближайшего соседа».

Замечание. Можно было проводить классификацию объектов с помощью принципа «дальнего соседа».

3.11. Диаграмма Парето

Диаграмма Парето строится в виде столбчатого графика и показывает в убывающем порядке относительное влияние каждой причины на общую проблему. Кроме того, на диаграмме обычно приводят кумулятивную кривую накопленного процента причин.

Диаграмма Парето позволяет анализировать проблемы из любой сферы деятельности предприятия, в том числе в сфере управления качеством. Причины изменений качества делятся на две группы: немногочисленные существенно важные и многочисленные несущественные. Устраняя причины первой группы, можно устранить почти все потери, вызванные снижением качества.

Диаграмму Парето целесообразно применять вместе с причинно-следственной диаграммой.

При использовании диаграммы Парето обычно сначала строят диаграмму по результатам деятельности для выявления главной из существующих проблем. Затем строят диаграмму по причинам и для выявления главных причин этой проблемы и её решения и т.д. После проведения корректирующих мероприятий диаграмму Парето можно вновь построить и проверить эффективность проведённых улучшений.

При использовании диаграммы Парето для контроля важнейших факторов распространён АВС-анализ. Например, если на складе находится большое число деталей, проводить контроль всех деталей без всякого различия неэффективно. Но если разделить детали на группы по их стоимости, то на долю группы наиболее дорогих деталей (группа А), составляющих 20–30 % от общего числа деталей, придётся 70–80 % от общей стоимости всех деталей. На долю группы самых дешёвых деталей (группа С), составляющей 40–50 % от всего количества деталей, придётся всего 5–10 % от общей стоимости. Стоимость промежуточной группы (группа В) составляет 20–30 % от общей стоимости. Контроль деталей на складе будет эффективным, если контроль деталей группы А будет самым жёстким, а контроль деталей группы С – упрощённым.

Рекомендуется составлять несколько вспомогательных диаграмм, входящих в состав группы А, с тем чтобы, последовательно анализируя их, в конечном итоге составить отдельную диаграмму Парето для конкретных явлений недоброкачественности.

Пример. Исследовать проблему появления брака при выпуске деталей.

С учётом того, что потери от брака одной детали каждого вида примерно одинаковы, в качестве единицы измерения выбираем число дефектных деталей каждого вида. После заполнения контрольных листков получаем данные, представленные в табл. 3.21.

Таблица 3.21

Исходные данные

№ детали	1	2	3	4	5	6	Прочие
Число дефектных деталей	255	101	59	39	26	15	11

По полученным данным разрабатываем таблицу для проверок данных. Создаём новую книгу Excel. В ячейке А1 вводим заголовок работы. В ячейки А3:Е3 вводим заголовки: **№ детали, Число дефектных деталей, Накопленная сумма деталей, Процент деталей, Накопленный процент**. Для компактного размещения заголовков выделяем третью строку и используем команду ***Формат – Ячейки...***, вкладку ***Выравнивание***, режим выравнивания по вертикали ***По центру***, режим отображения ***Переносить по словам***.

В ячейки А4:В10 вводим данные из таблицы 3.21. В ячейку А11 вводим заголовок **Итого**. В ячейке В11 рассчитываем суммарное число дефектных деталей при помощи математической формулы СУММ.

Для расчёта накопленной суммы деталей в ячейку С4 вводим значение 255, т.е. число дефектных деталей 1. В ячейке С5 суммируем число дефектных деталей 1 и 2, т.е. вводим формулу =С4+В5. Для расчёта накопленной суммы деталей в остальных ячейках копируем формулу из ячейки С5 в диапазон С6:С10.

Для расчёта процента деталей следует делить число дефектных деталей каждого вида на общее число дефектных деталей и умножать на 100. Таким образом, в ячейку D4 вводим формулу =В4/В11*100. После указания необходимой абсолютной адресации копируем эту формулу в диапазон D5:D10. В ячейке D11 рассчитываем суммарный процент, который должен составить 100 %.

Для расчёта накопленного процента деталей в ячейку Е4 значение (только значение, а не формулу) из ячейки D4. Для этого используем команды ***Правка–>Копировать*** и ***Правка–>Специальная вставка...*** . В ячейке Е5 суммируем процент дефектных деталей 1 и 2, т.е. вводим формулу =Е4+D5. Для расчёта накопленного процента в остальных ячейках копируем формулу из ячейки Е5 в диапазон Е6:Е10.

По таблице для проверок данных строим диаграмму Парето. Для этого открываем в мастере диаграмм вкладку **Нестандартные**, выбираем диаграмму типа **График/гистограмма 2**. На втором шаге указываем диапазон данных А4:В10; Е4:Е10. На третьем шаге вводим заголовки и убираем легенду.

После создания диаграммы мастером диаграмм редактируем её при помощи контекстных меню. В частности, максимальное значение шкалы **Число дефектных деталей** указываем 506, а минимальное 0. Максимальное значение шкалы **Накопленный процент** указываем 100. Открываем контекстное меню на одном из столбцов, выбираем команду **Формат рядов данных...**, вкладку **Параметры**, и устанавливаем ширину зазора 0.

Результаты расчётов и построений показаны на рис. 3.13.

	A	B	C	D	E
1	Лаб. работа 7. Диаграмма Парето				
2					
3	№ детали	Число дефектных деталей	Накопленная сумма деталей	Процент деталей	Накопленн процент
4	1	255	255	50,3953	50,3952569
5	2	101	356	19,9605	70,3557312
6	3	59	415	11,6601	82,0158102
7	4	39	454	7,70751	89,7233201
8	5	26	480	5,13834	94,8616600
9	6	15	495	2,96443	97,8260869
10	Прочие	11	506	2,17391	100
11	Итого	506		100	
12					
13					

Рис. 3.13. Построение диаграммы Парето по числу дефектных деталей.

Как видно из диаграммы, к группе А можно отнести детали 1 и 2 (70 % от брака), к группе В – детали 3,4,5, к группе С – детали 6 и прочие.

Приведенный пример был выполнен в Excel 2003, есть некоторые особенности построения диаграммы Парето в Excel 2007 и выше, поэтому стоит рассмотреть отдельно. Дело в том, что здесь уже отсутствует нестандартная диаграмма типа Гистограмма2.

Представление данных в смешанной диаграмме

Чтобы выделить различные типы данных в диаграмме, можно объединить в ней два или несколько типов диаграмм. Например, можно создать диаграмму, сочетающую в себе гистограмму и график, чтобы сделать такую диаграмму понятнее.

Если диапазоны значений для разных рядов данных в диаграмме существенно различаются или при наличии смешанных типов данных можно вывести один или несколько рядов данных из другого типа диаграммы на вспомогательной вертикальной оси (оси значений) (рис. 3.14).

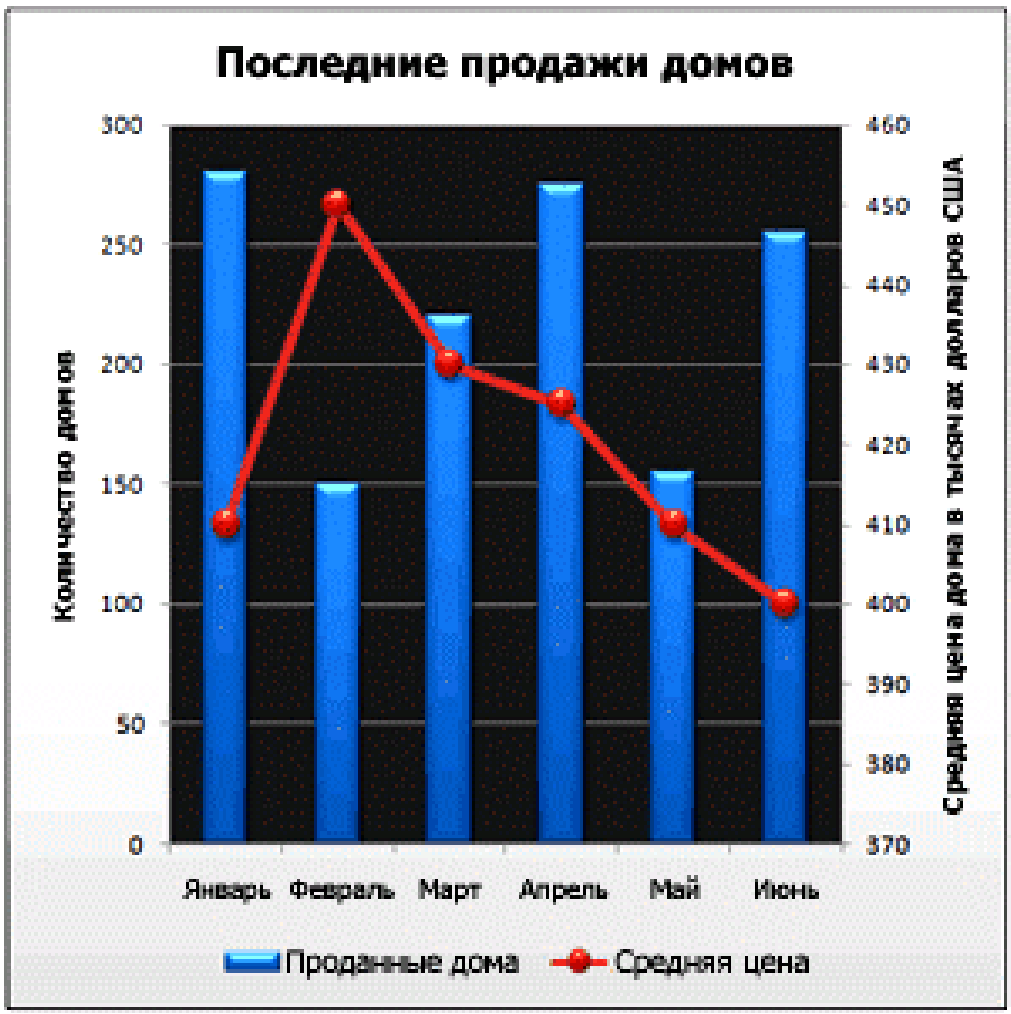


Рис. 3.14. Пример смешанной диаграммы

Создание смешанной диаграммы

Изложенная ниже процедура поможет создать смешанной диаграмму с результатами, аналогичными показанным на приведенном образце смешанной диаграммы. Для этой диаграммы использовались данные листа примера. Можно скопировать эти данные на лист или воспользоваться собственными данными, если используемые заголовки столбцов и структура листа одинаковы.

Скопируйте данные листа примера в пустой лист или откройте лист, содержащий данные, которые требуется отразить в смешанной диаграмме.

Создайте пустую книгу или лист.

Выделите пример в разделе справки.

Примечание. Не выделяйте заголовок строки или столбца.

Выделение примера в справке.

Нажмите сочетание клавиш CTRL+C

На листе выделите ячейку A1 и нажмите сочетание клавиш CTRL+V.

	A	B	C
1		**Продано домов**	**Средняя цена**
2	**Янв**	280	410
3	**Фев**	150	450
4	**Мар**	220	430
5	**Апр**	275	425
6	**Май**	155	410
7	**Июн**	255	400

Рис. 3.15. Пример исходных данных на листе Excel

Выделите данные, на основе которых будет создана смешанная диаграмма.

На вкладке **Вставка** в группе **Диаграммы** нажмите кнопку **Гистограмма**.

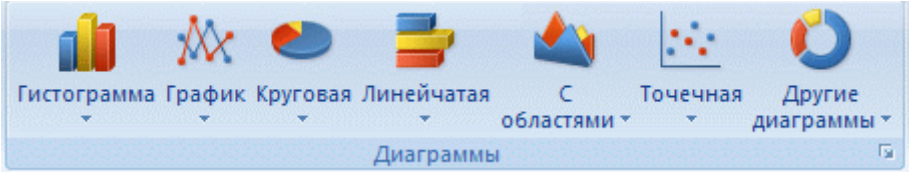


Рис. 3.16. Вид меню

В группе **Гистограмма** нажмите кнопку **Гистограмма**.

В диаграмме щелкните ряды данных, которые требуется отразить в диаграмме другого типа, либо выберите их из списка элементов диаграммы (вкладка **Макет**, группа **Текущий фрагмент**, поле **Элементы диаграммы**).

Совет. Для смешанной диаграммы примера выделен ряд данных **Средняя цена**.

Появится элемент **Диаграммы**, при этом станут доступны вкладки **Конструктор**, **Макет** и **Формат**.

На вкладке **Конструктор** в группе **Тип** нажмите кнопку **Изменить тип диаграммы**.

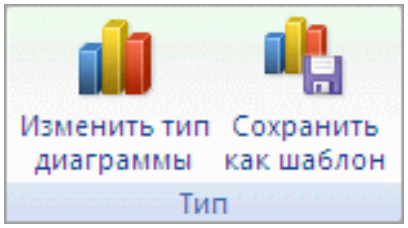


Рис. 3.17. Вид пиктограммы

Примечание. Если вся диаграмма будет преобразована в график, следует удостовериться, что был выбран только один тип данных.

В группе **График** выберите значение **График с маркерами**, а затем нажмите кнопку **ОК**.

Чтобы построить линию на вспомогательной оси, выполните следующие действия:

На диаграмме щелкните линию, отражающую среднюю цену или выберите ее в списке элементов диаграммы (вкладка **Макет**, группа **Текущий фрагмент**, поле **Элементы диаграммы**).

На вкладке **Макет** в группе **Текущий фрагмент** нажмите кнопку **Формат выделенного фрагмента**.

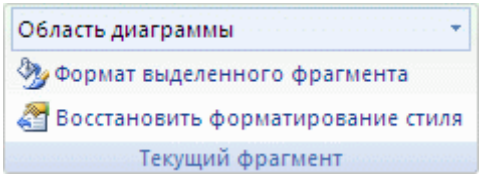


Рис. 3.18. Выбор кнопки Формат выделенного фрагмента

В категории **Параметры ряда** в разделе **Построить ряд** нажмите кнопку **Вспомогательная ось**, а затем нажмите кнопку **Закрыть**.

Щелкните область диаграммы.

На вкладке **Конструктор** в группе **Виды диаграмм** щелкните нужный вид диаграммы.

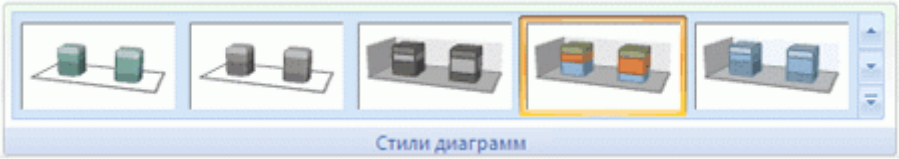


Рис. 3.19. Выбор вида диаграммы

Совет. Для образца смешанной диаграммы было выбрано значение **Вид 42**.

Чтобы изменить размер диаграммы, на вкладке **Формат** в группе **Размер** в полях **Высота фигуры** и **Ширина фигуры** выберите нужный размер фигуры, а затем нажмите клавишу ВВОД.

Совет. В образце диаграммы задана высота фигуры **5**, ширина фигуры также составляет **5**.

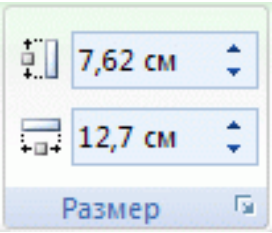


Рис. 3.20. Выбор размера

Совет. Чтобы изменить размер диаграммы, можно перетащить мышью один из ее углов, чтобы диаграмма приняла требуемый размер.

Чтобы добавить, отформатировать и разместить заголовок диаграммы в диаграмме, щелкните область диаграммы , а затем выполните следующие действия:

На вкладке **Макет** в группе **Подписи** нажмите кнопку **Заголовок диаграммы**, а затем – кнопку **Над диаграммой**.

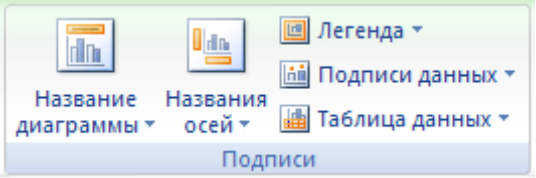


Рис. 3.21. Выбор заголовка

В диаграмме щелкните ее заголовок, а затем введите нужный текст.

Совет. Для образца смешанной диаграммы был введено название **Продажи домов за последний период**.

Чтобы уменьшить размер заголовка диаграммы, щелкните его правой кнопкой мыши, а затем введите требуемый размер в поле **Размер** в контекстном меню.

Совет. Для образца смешанной диаграммы было выбрано значение **18**.

Чтобы переместить легенду, выполните следующие действия:

Щелкните легенду, чтобы выделить ее.

На вкладке **Макет** в группе **Подписи** нажмите кнопку **Легенда**, а затем выберите расположение легенды.

Совет. Для образца смешанной диаграммы было выбрано значение **Показать легенду внизу**.

Чтобы добавить заголовки вертикальных осей, выполните следующие действия:

На вкладке **Макет** в группе **Подписи** нажмите кнопку **Названия осей**, а затем выполните следующие действия:

– Нажмите кнопку **Название основной вертикальной оси**, а затем щелкните нужный параметр заголовка.

– Нажмите кнопку **Название вспомогательной вертикальной оси**, а затем щелкните нужный параметр заголовка.

Совет. Для образца диаграммы был выбран параметр **Повернутое название** для обеих осей.

Щелкните заголовки каждой из осей, а затем введите нужный текст заголовков.

Совет. Для образца диаграммы был введен текст **Число домов** для заголовка основной вертикальной оси и текст **Средняя цена дома в тысячах** для заголовка вспомогательной оси.

Чтобы изменить размер шрифта в заголовках осей, щелкните каждый из заголовков осей, а затем в поле **Размер шрифта** укажите нужный размер.

Совет. Для образца диаграммы используется размер шрифта **14**.

Чтобы изменить вид маркеров на линии «Средняя цена», выполните следующие действия:

Щелкните правой кнопкой мыши маркер и выберите в контекстном меню команду **Формат рядов данных**.

Нажмите кнопку **Параметры маркеров**, а затем в группе **Тип маркера** щелкните значение **Встроенные**.

В поле **Тип** щелкните нужный тип маркера.

Совет. Для образца смешанной диаграммы был выбран круглый маркер.

Щелкните область диаграммы.

На вкладке **Формат** в группе **Стили фигур** нажмите кнопку **Дополнительно**, а затем выберите нужный эффект.

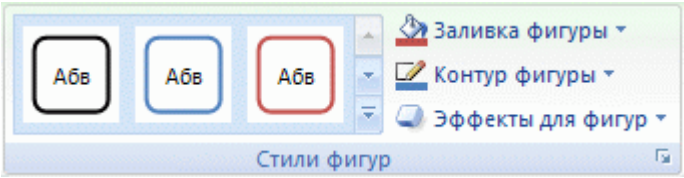


Рис. 3.22. Выбор нужного эффекта

Совет. Для области диаграммы образца смешанной диаграммы используется стиль **Неяркий эффект – темный 1**.

Если нужно воспользоваться цветами темы, которая не является темой, применяемой к книге по умолчанию, выполните следующие действия:

На вкладке **Разметка страницы** в группе **Темы** нажмите кнопку **Темы**.

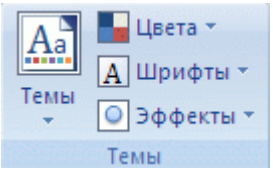


Рис. 3.23. Выбор темы

В группе **Встроенные** щелкните нужную тему.

Совет. Для образца смешанной диаграммы используется тема **Office**.

Сохранение диаграммы в качестве шаблона

Если требуется создать другую такую диаграмму, можно сохранить данную диаграмму как шаблон, который затем может использоваться в качестве основы для аналогичных диаграмм.

Щелкните диаграмму, которую необходимо сохранить в качестве шаблона.

На вкладке **Конструктор** в группе **Тип** щелкните **Сохранить как шаблон**.

Рис. 3.24. Сохранение шаблона

В поле **Имя файла** введите имя шаблона.

Совет. Если не указана другая папка, файл шаблона (.crtx) будет сохранен в папке **Диаграммы**, а шаблон появится в области **Шаблоны** диалогового окна **Вставка диаграммы** (вкладка **Вставка**, группа **Диаграммы**, кнопка вызова диалогового окна) и диалогового окна **Изменение типа диаграммы** (вкладка **Конструктор**, группа **Тип**, кнопка **Изменить тип диаграммы**).

Примечание. При сохранении диаграммы в качестве шаблона создается шаблон, содержащий форматирование диаграммы и используемые цвета. При создании диаграммы в другой книге с помощью шаблона диаграммы для новой диаграммы будут использоваться цвета шаблона диаграммы, а не цвета темы документа, примененной к книге. Чтобы вместо цветов шаблона диаграммы использовать цвета темы документа, щелкните правой кнопкой мыши область диаграммы, а затем выберите в контекстном меню команду **Восстановить форматирование стиля**.

4. ЭКСПЕРТНЫЕ МЕТОДЫ

4.1. Общая характеристика экспертных методов прогнозирования

Использование формальных методов прогнозирования ориентировано на полную и достоверную информацию. В месте с тем существует достаточно много ситуаций, когда явление или процесс меняет характер своего развития настолько быстро, что количественная информация, характеризующая его изменение в прошлом, к моменту разработки прогноза уже устаревает и не может быть использована.

Возможны случаи, когда информация отражает только качественную сторону явления и не поддается количественной оценке. Это относится к сложным процессам или объектам, для которых характерно наличие большого числа неоднозначных связей между их элементами, а также существенное воздействие факторов внешней среды, влияние которых носит случайный характер и невозможно установить. Кроме того, реальная действительность может оказаться такой, что развитие процессов опережает их формальное познание.

Формальные методы прогнозирования не могут быть использованы и в отношении тех процессов, направление развития которых зависит от принимаемых решений. Это относится к частично или полностью управляемым процессам с различными способами достижения целей или конструирования желательных состояний процессов или объектов в будущем. Не возможно применить формальные методы прогнозирования в условиях дефицита времени или в экстремальных ситуациях.

В таких случаях установить картину будущего позволяют экспертные методы. Экспертные методы прогнозирования представляют собой совокупность логических и формальных приемов и процедур, применяемых для получения прогноза с помощью высококвалифицированных специалистов – экспертов.

Применяемые в прогнозировании экспертные методы делят на индивидуальные и коллективные. Индивидуальные методы основаны на использовании оценок экспертов, высказанных независимо друг от друга. Это значит, что каждый эксперт дает свой прогноз без обсуждения его с другими экспертами, но общий прогноз получают в результате обработки оценок всей группы экспертов. Если объект прогнозирования является сложным, то экспертный прогноз может представлять собой оценку одного-двух экспертов.

Основные преимущества индивидуальных методов – возможность максимального использования индивидуальных способностей конкретного специалиста-эксперта и практическое отсутствие психологического давления, оказываемого экспертами друг на друга. Однако эти методы мало пригодны для прогнозирования сложных процессов или объектов из-за ограниченности знаний одного эксперта только своей областью деятельности или знаний.

Методы коллективных экспертных оценок основываются на принципах выявления коллективного мнения экспертов о перспективах развития объекта прогнозирования. Преимущества коллективных экспертных методов перед индивидуальными методами состоят в следующем:

1. Суммарная информация, которой располагает группа экспертов (при правильном ее подборе), гораздо больше информации любого из участников группы. Количество факторов, которыми оперирует группа экспертов, обычно превосходит число факторов, учитываемых отдельным экспертом.

2. Правильно организованное взаимодействие группы экспертов способствует разработке более обоснованного прогноза, так как позволяет компенсировать разброс мнений экспертов.

Кроме того, каждый из коллективных экспертных методов получения прогноза может иметь свои преимущества, заложенные в процедуре экспертизы, например, способ отбора экспертов, установления обратной связи, учет степени компетентности экспертов и так далее.

Существует достаточно много экспертных методов, различающихся по назначению и технологии получения прогноза: метод интервью; метод комиссий (метод коллективной генерации идей); метод Дельфи; метод аналитических записок; составление прогнозного графа и дерева целей; матричный метод; метод морфологического анализа; сценарный метод прогнозирования.

Области применения экспертных методов прогнозирования различны, хотя чаще эти методы используют для прогнозирования научно-технического прогресса, развития технологий, техники, материалов. Многие экспертные методы являются нормативными методами прогнозирования, в которых требуется найти способ, средство достижения определенного на перспективу результата.

Основными задачами при получении прогноза с помощью экспертов являются: отбор экспертов; подготовка и проведение экспертизы; обработка полученных экспертных оценок. Далее рассмотрено содержание двух из них: отбор экспертов и разработка обобщенного прогноза. С подготовкой и содержанием экспертизы можно познакомиться в.

4.2. Отбор экспертов

«Эксперт» в дословном переводе с латинского означает «опытный». К эксперту, которого привлекают для получения прогнозов, предъявляют следующие требования:

– эксперт должен быть признанным специалистом в данной области знаний или деятельности;

– наличие дополнительной информации об объекте прогноза лишь улучшает оценку эксперта;

– эксперт должен обладать некоторым опытом разработки успешных прогнозов.

При отборе экспертов решают две проблемы: определяют численность экспертов и степень их квалификации или компетентность. Эти проблемы взаимосвязаны между собой, так как необходимость сформировать группу квалифицированных специалистов обычно ограничивает число потенциальных экспертов.

Каких-либо требований о том, какой должна быть численность экспертов для получения прогноза не существует. Установить оптимальную численность

группы экспертов довольно трудно. Интуитивно понятно, чем больше группа экспертов, тем более надежные оценки могут быть получены. Число специалистов, которые могут быть привлечены для разработки прогноза, зависит от особенностей объекта прогнозирования; времени и средств, отведенных на получение прогноза; возможности сформировать группу компетентных экспертов.

Формируя группу экспертов, следует помнить, что существует две категории экспертов: узкие специалисты и специалисты широкого профиля. Первые из них не всегда могут достаточно квалифицированно рассмотреть общие, глобальные, вопросы. Для этих целей следует привлекать экспертов, обладающих широтой взглядов и способностью к воображению.

Определение компетентности экспертов является очень важной проблемой. Для формирования группы компетентных экспертов используют методы: 1) самооценки; 2) взаимной оценки; 3) основанные на использовании результатов прошлой деятельности.

В методах самооценки специалисту самому предлагают оценить уровень своей компетентности, но оценка производится в несколько завуалированном виде. При этом определяют компетентность эксперта, оценивая аргументы, послужившие ему основанием для ответа, а также степень его знакомства с рассматриваемым вопросом. В результате такой оценки рассчитывают коэффициент компетентности

$$K_k: \quad K_k = (K_з + K_a)/2, \tag{4.1}$$

где $K_з$ – коэффициент знакомства;

K_a – коэффициент аргументированности.

Коэффициент $K_з$, учитывающий степень знакомства эксперта с той проблемой, по которой требуется дать прогноз, рассчитывают так:

$$K_з = 0{,}1 \cdot B, \tag{4.2}$$

где B – балл, который эксперт определяет сам по предложенной ему шкале.

Для определения балла может быть использована, например, следующая шкала: 0 – эксперт не знаком с проблемой; 1, 2, 3 – эксперт плохо знаком с проблемой, но она входит в сферу его интересов; 4, 5, 6 – эксперт удовлетворительно знаком с проблемой, но не принимал практического участия в ее решении; 7, 8, 9 – эксперт хорошо знаком с проблемой и принимал практическое участие в ее решении; 10 – проблема является узкой специализацией эксперта.

С помощью коэффициента K_a учитывают аргументы, послужившие эксперту основанием для произведенной им оценки. Его рассчитывают как сумму частных коэффициентов, взятых из специальной заранее составленной шкалы оценок. Пример такой шкалы оценок приведен в табл. 4.1:

Таблица 4.1

Шкала оценок источников аргументации

Источник аргументации	Степень влияния источника		
	высокая	средняя	низкая
Практический опыт работы	0,1	0,08 *	0,05
Образование	0,05	0,04	0,025 *
Знакомство с зарубежным опытом	0,1 *	0,08	0,05
Интуиция	0,05	0,04 *	0,025
Анализ работы фирмы	0,4 *	0,32	0,2
Анализ рынка услуг в регионе	0,3	0,24 *	0,15

В таблице перечисляются источники аргументации, которые являются важными для выработки прогноза, и определяется степень влияния каждого источника. Перечень источников аргументации и частные коэффициенты разрабатывает группа аналитиков. При составлении таблицы принимаются во внимание следующие соображения: коэффициент K_a не может быть больше 1; при высокой степени влияния на мнение эксперта всех источников аргументации K_a=1; при средней степени влияния – K_a=0,8; при низкой – K_a=0,5. В зависимости от особенностей объекта прогнозирования источники аргументации и значения частных коэффициентов, характеризующих их важность, могут быть другими.

Эксперту дают таблицу, в которой перечислены источники аргументации, но отсутствуют коэффициенты, и предлагают сделать отметку, характеризующую степень влияния (высокую, среднюю, низкую) каждого источника на его оценку. Наложив полученную от эксперта информацию на таблицу с частными коэффициентами, рассчитывают K_a конкретного эксперта. Например, если эксперт указал степень влияния аргументов, как помечено «звездочкой» в таблице, то его K_a = 0,885. Зная коэффициенты $K_з$ и K_a, рассчитывают коэффициент компетентности. Исходя из оценки компетентности кандидатов в эксперты и задав минимально допустимое значение коэффициента K_k, производят их отбор. Коэффициенты компетентности могут учитываться и при расчете общего прогноза, который дает группа экспертов.

Вторая группа методов основана на том, что кандидаты в эксперты знают друг друга. В этом случае можно воспользоваться одним из следующих способов отбора.

Первый способ. Аналитики формируют первоначальную группу ведущих специалистов в той области, где требуется получить прогноз. Затем каждому из них предлагают назвать N наиболее компетентных в рассматриваемом вопросе специалистов. Если во втором списке появляются новые кандидатуры, им также предлагают назвать следующих N специалистов. Процедуру повторяют до тех пор, пока перестанут появляться новые лица или повторяемость кандидатур составит 90–95 %.

Второй способ. В виде анкеты определяют перечень характеристик, которыми должен обладать эксперт, и систему баллов для их оценки, например:

1. Опыт решения аналогичных проблем – 5; 4; 3; 2; 1;

2. Интуиция – 5; 4; 3; 2; 1;

3. Способность учесть все факторы, характерные для ситуации – 5; 4; 3; 2; 1; и так далее

Каждому из потенциальных экспертов предлагают определить квалификацию других специалистов, отмечая в именных анкетах соответствующие баллы. Подсчитывают сумму баллов, которую наберет каждый претендент, и отбирают тех, которые набрали не менее определенной суммы.

Третий способ. Формируют избыточную группу специалистов (например, 10). Затем каждому из кандидатов в эксперты предлагают назвать определенное число специалистов (например, 5), которые по его мнению являются компетентными и могут быть привлечены для разработки прогноза по рассматриваемой проблеме. После опроса составляют первую матрицу взаимных оценок; подсчитывают, сколько раз был назван каждый кандидат в эксперты и какое место он занимает в списке кандидатур. Пример такой матрицы приведен ниже (табл. 4.2).

Вторую матрицу взаимных оценок составляют уже с учетом того, сколько раз был назван каждый кандидат в эксперты другими специалистами. Иными словами при составлении этой таблицы учитывают авторитетность кандидатур.

Рассчитывают суммарную оценку каждого специалиста и ранжируют их по набранной сумме баллов, то есть определяют место каждого специалиста в списке кандидатур. Из составленного списка выбирают наиболее квалифицированных специалистов. Если в приведенном примере нужно было отобрать 5 кандидатур, то в качестве экспертов должны выступить специалисты, занявшие места с 1 по 5 и указанные под номерами 2, 4, 5, 7, 8 (табл. 4.3).

Таблица 4.2

Первая матрица взаимных оценок экспертов

Кого назвали	Кто назвал										1-я оценка (сколько раз назван)	Какие места занимают
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	0	1			1				1		3	10
2		0	1		1		1	1	1	1	6	3
3	1		0		1	1	1				4	6,7,8,9
4		1	1	0	1	1	1	1	1	1	8	1
5	1		1	1	0	1		1			5	4,5
6		1		1		0	1			1	4	6,7,8,9
7	1	1	1		1		0	1	1	1	7	2
8	1	1		1		1		0	1		5	4,5
9			1	1			1		0	1	4	6,7,8,9
10	1			1		1		1		0	4	6,7,8,9
Итого	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	50	

Таблица 4.3

Вторая таблица взаимных оценок

Кого назвали	Кто назвал										2-я оценка	Какие места занимают
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	0	6			5				4		15	10
2		0	4		5		7	5	4	4	29	3

Кого назвали	Кто назвал										2-я оценка	Какие места занимают
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
3	3		0		5	4	7				19	9
4		6	4	0	5	4	7	5	4	4	39	1
5	3		4	8	0	4		5			24	5
6		6		8		0	7			4	21	7
7	3	6	4		5		0	5	4	4	31	2
8	3	6		8		4		0	4		25	4
9			4	8			7		0	4	23	6
10	3			8		4		5		0	20	8

Методы, основанные на использовании прошлой деятельности специалиста, применяют наиболее часто. Самый простейший из них – отбор специалистов по стажу работы, занимаемой должности. Несмотря на кажущуюся объективность такого отбора, метод не всегда дает надежные результаты, поэтому его лучше применять в сочетании с другими методами.

Если эксперт относительно часто дает прогнозы и известно число подтвердившихся из них, то можно рассчитать коэффициент совпадения прогнозов K_c:

$$K_c = N_c / N, \tag{4.3}$$

где N_c – число случаев, когда прогноз оправдался,

N – общее число прогнозов, которые давал эксперт.

Понятна трудность такого способа отбора экспертов – нужно отслеживать информацию для расчета K_c, а это довольно сложно осуществить.

Хотя рассмотренные методы отбора экспертов и далеки от совершенства, однако, их применение обеспечивает более высокую надежность результатов, чем использование «волевых» решений о назначении экспертов.

4.3. Разработка обобщенного прогноза

Прогнозы, получаемые с помощью экспертов, могут иметь качественное или количественное выражение. В зависимости от содержания рассматриваемой проблемы в результате применения экспертного метода прогнозирования может быть

– получено логическое высказывание о состоянии объекта (системы) в будущем или об общей тенденции развития какого-то процесса;

– выбраны мероприятия, которые должны быть реализованы для достижения цели, поставленной на перспективу;

– определены виды услуг, продукции, на которые в будущем следует ожидать повышенный спрос;

– дана оценка вероятности или времени наступления конкретного события в будущем;

– названы ожидаемые количественные характеристики объекта прогнозирования.

Экспертные оценки по своей сути субъективны, так как разные люди по одному и тому же вопросу могут высказывать несовпадающие суждения. При этом сами суждения являются результатом мыслительной деятельности эксперта, когда не представляется возможным установить логику появления этой оценки. Но поскольку в основе каждой из них лежит накопленный опыт, результаты анализа сущности проблемы, чувство перспективы и интуиция высококвалифицированных специалистов, то предполагается, что различия между суждениями будут не слишком велики, либо они могут быть преодолены путем корректировки после получения дополнительных сведений от других экспертов.

Хотя экспертные оценки субъективны, это не означает, что экспертные методы прогнозирования полностью отвергают применение формальных правил и процедур вывода прогнозных оценок. Напротив, чем более упорядочена, формализована процедура разработки прогноза на основе суждений экспертов, тем большую степень достоверности имеет результат.

В широком смысле роль формальных методов сводится к уменьшению неопределенности будущего, выявлению оригинальных суждений, отсеиванию случайных оценок, а также к получению обобщенных характеристик всей совокупности суждений экспертов. Процедура получения обобщенного прогноза зависит от типа прогнозной задачи, от способа получения экспертных оценок и ряда других моментов.

Когда оценка, получаемая от экспертов в процессе прогнозирования, носит количественный характер (или приведена в количественный вид), для получения общего прогноза можно использовать формальные методы обработки. При этом могут иметь место следующие ситуации.

Ситуация 1. Экспертная оценка представляет собой результат ранжирования (например, экспертов привлекали для определения важности достижения в будущем поставленных целей или выбора вида услуг, на которые в будущем следует ожидать повышенный спрос).

В этой ситуации для получения обобщенного суждения используют методы ранговой корреляции. Вначале ответы всех экспертов сводят в общую таблицу и рассчитывают сумму рангов для каждого объекта, важность которых оценивали эксперты. Так как наименьший ранг присваивают наиболее важному виду услуг (цели и т.п.), то тот из них, который получил наименьшую сумму рангов, и представляет ответ на поставленный вопрос. Если ставилась задача выбрать несколько объектов оценки, то их число ограничивают теми, которые получили наименьшие суммарные оценки.

Однако прежде чем воспользоваться результатами опроса экспертов, следует проверить согласованность их ответов. Для этого рассчитывают коэффициент конкордации и проверяют его статистическую значимость с помощью критерия Пирсона.

Если будет обнаружена несогласованность ответов экспертов, то с помощью коэффициента ранговой корреляции Спирмэна определяют тесноту связи оценок каждой пары экспертов. Коэффициенты ранговой корреляции записывают в виде треугольной матрицы и анализируют. В результате анализа выявляют экспертов с «аномальными» ответами или обнаруживают, что ответы экс-

пертов неоднородны и их нужно разделить на несколько групп. В обоих случаях нужно понять причины несогласованности ответов экспертов:

– дают ли эксперты разные оценки по принципиальным соображениям;

– в группе присутствуют малоквалифицированные эксперты, оценки которых искажают общую картину;

– эксперты неоднозначно понимают поставленную перед ними задачу.

Если «нетипичными» оценками можно пожертвовать, их исключают из первоначальной матрицы, заново рассчитывают сумму рангов и проверяют согласованность оставленных ответов. Только убедившись в том, что эти оценки согласуются, делают вывод о том, какой прогноз дали эксперты.

Ситуация 2. Прогноз экспертов выражен числом.

На способы получения обобщенного результата в этом случае влияет количество полученных оценок, распределение индивидуальных оценок в интервале их изменения, а также цели преследуемые при получении обобщенного прогноза.

Ситуация 2а. При разработке прогноза необходимо представить мнение всей группы экспертов. Такой подход особенно важен, когда в изменении индивидуальных прогнозов экспертов наблюдается относительно большая вариация и их распределение асимметрично. В этом случае групповой ответ может быть представлен в виде медианы и двух квартилей (нижней и верхней). Как известно, медиана представляет такое число, которое делит оценки экспертов на две равные части, при этом оценки одной половины членов группы больше этого числа, а другой половины – меньше. Сумма абсолютных значений отклонений всех индивидуальных прогнозов от медианы минимальна. Квартили – это два числа, которые отделяют оценки внутренней половины членов экспертной группы от оценок внешних четвертей. Таким образом, величина интервала между квартилями характеризует разброс ответов экспертов.

Ситуация 2б. Обобщенный прогноз должен представлять величину, типичную для всей совокупности ответов экспертов. В этом случае в качестве общего прогноза принимают среднее значение. Кроме точечного прогноза, рассчитывают интервальный прогноз, находя доверительный полуинтервал. Если изменение индивидуальных прогнозов, которые дали эксперты, близко к нормальному закону распределения, то обобщенный прогноз будет представлять мнение большинства экспертов.

Ситуация 2в. При прогнозировании очень сложных процессов или явлений оценки экспертов могут сильно расходиться. В таких случаях спорным является требование, что согласованные оценки экспертов более достоверны, чем «размытые». Необходимо считаться с этим и фиксировать неопределенность ответов экспертов.

При несогласованности мнений экспертов для получения обобщенного прогноза может быть использован игровой подход. Вначале составляют платежную матрицу. Элементы этой матрицы представляют собой относительную погрешность, которая будет допущена при выборе прогноза Y_i в то время как реализуется прогноз Y_j. Затем находят решение игры в смешанных стратегиях,

сведя полученную задачу к общей задаче линейного программирования и используя симплекс-метод.

Точечный прогноз рассчитывают как сумму произведений вероятности реализации прогноза (P_i) на его величину (Y_i). Если прогноз Y_i был получен в результате обработки индивидуальных оценок i-той подгруппы экспертов, то можно рассчитать и интервальный прогноз. Предварительная группировка индивидуальных оценок экспертов становится необходимой, когда среди общей группы экспертов выделяется несколько подгрупп, в каждой из которых эксперты дают близкие оценки, а различие оценок экспертов разных подгрупп существенное.

Для расчета интервального прогноза нужно иметь показатель вариации (остаточное среднеквадратическое отклонение – S). Величину S можно рассчитать, перемножив показатели вариации оценок каждой i-той группы экспертов (S_i) на соответствующие вероятности P_i.

Используя данный подход для получения обобщенной оценки экспертов, следует иметь в виду, что полученная оценка является пессимистичной.

4.4. Использование экспертных методов при расчете рисков

Данная методика рисков была разработана Инвестиционно-финансовой группой и Российской финансовой корпорацией и является одной из наиболее адаптированных к современным экономическим условиям методик. В этой методике риски делятся по характеру воздействия на простые и сложные. При этом сложные риски являются объединением простых рисков, определенных полным перечнем непересекающихся событий, каждое из которых, в свою очередь, исследуется отдельно. Задачами, решаемыми в ходе количественного анализа рисков, являются: составление исчерпывающего перечня рисков; определение удельного веса каждого простого риска по всей их совокупности; оценка вероятности наступления событий, относящихся к каждому простому риску; определение балльной оценки по всем рискам проекта.

1. Перечень рисков, возникающих при инвестировании капитальных вложений

В таблице 4.1 представлен перечень наиболее распространенных простых рисков по всем стадиям инвестиционного проекта: подготовительной, строительства и функционирования. Оценка риска может производиться отдельно для каждой стадии и в целом для всего инвестиционного проекта.

2. Определение удельного веса простого риска инвестиций во всей совокупности

Введем обозначения: Si – простой риск, $i = 1,\ldots,n$; n – общее число рисков инвестиционного проекта; Qj – группа приоритета, $j = 1, k$, $k < n$; Wj – вес простых рисков по группам приоритета Qj, $Wj > 0$, $\Sigma Wj = 1.0$; Mj – число рисков, входящих в приоритетную группу Qj. Последовательность расчетов представим шагами:

1. Принципиальным для расчетов является предположение о том, во сколько раз первый приоритет весомее последнего, то есть:

$$W1 / Wk = f. \quad (4.4)$$

2. Определяется вес группы с наименьшим приоритетом по формуле:

$$Wk = 2 / [k (f + 1)]. \quad (4.5)$$

3. Определяются веса остальных групп приоритетов:

$$Wj = Wk[(k - j)f + j - 1] / (k - 1). \quad (4.6)$$

4. Определяются веса простых факторов

$$Wi = Wj / Mj \quad (4.7)$$

для каждого простого риска, входящего в соответствующую приоритетную группу. Это означает, что все простые риски внутри одной приоритетной группы имеют одинаковые веса. Если приоритеты по простым рискам не устанавливаются, то все они имеют равные веса:

$$Wi = 1 / n. \quad (4.8)$$

Результаты расчетов целесообразно оформлять в виде таблицы (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Простые риски по стадиям проекта

Вид риска	Отрицательное влияние на ожидаемую прибыль от реализации проекта
Риски на стадии подготовки инвестиционного проекта	
Удаленность от транспортных узлов и инженерных сетей	Дополнительные затраты на создание подъездных путей, подводку тепла, воды, электроэнергии
Наличие альтернативных источников сырья	Опасность завышения цен при монопольном положении подрядчика
Отношение местных властей	Возможность введения ими дополнительных ограничений, осложняющих реализацию проекта
Риски на стадии строительства	
Непредвиденные затраты	Увеличение объема заемных средств
Недостатки проектных работ	Рост стоимости строительства, задержка ввода мощностей
Несвоевременная поставка комплектующих изделий	Увеличение сроков строительства, выплата штрафов подрядчику
Финансово-экономические риски на стадии функционирования	
Снижение цен, увеличение объемов у конкурентов	Снижение цен, падение объемов продаж
Недостаток оборотных средств	Увеличение кредитов
Платежеспособность потребителей, рост налогов	Падение объемов продаж, уменьшение чистой прибыли
Социальные риски на стадии функционирования	
Отношение местных властей	Дополнительные затраты на выполнение их требований

Вид риска	Отрицательное влияние на ожидаемую прибыль от реализации проекта
Недостаточная квалификация кадров	Снижение ритмичности, рост брака, увеличение аварий
Социальная инфраструктура	Рост непроизводственных затрат
Технические риски на стадии функционирования	
Изношенность оборудования	Увеличение проектов, затрат на ремонт, аварийности технологий
Новизна технологий	Рост затрат на освоение, сокращение объемов производства
Отсутствие резерва мощностей	Невозможность покрытия пикового спроса, потери объемов производства
Экологические риски на стадии функционирования	
Выбросы в атмосферу и сбросы в водоемы	Затраты на очистное оборудование
Близость населенных пунктов	Рост затрат на очистные сооружения и экологическую экспертизу проекта
Складирование отходов	Увеличение себестоимости продукции

3. Оценка вероятности наступления риска инвестиций

Оценка вероятности наступления риска инвестиций осуществляется методом экспертных оценок. Для проведения этой работы желательно иметь не менее трех экспертов, хорошо знакомых с существом проблемы. Экспертами могут быть руководитель организации, сотрудник администрации территории, занимающийся экономическими вопросами, квалифицированный специалист и др. Каждому эксперту, работающему отдельно, предоставляется перечень рисков проекта и предлагается оценить вероятность их наступления по системе оценок: 0 – риск рассматривается как несущественный; 25 – риск, скорее всего, не реализуется; 50 – о наступлении события определенного вывода сделать нельзя; 75 – риск, скорее всего, проявится; 100 – риск наверняка реализуется. Оценки экспертов подвергаются анализу на их непротиворечивость, который выполняется по следующим правилам.

Правило 1:

$$\max |Ai - Bi| < 50; \tag{4.9}$$

$i = 1,\ldots,n$ (где Ai и Bi – оценки двух экспертов в отношении i-го риска) – означает, что максимальная разница между оценками экспертов по любому фактору должна быть меньше 50. Сравнения проводятся по модулю (знак «плюс» или «минус» не учитывается). Это правило направлено на устранение недопустимых различий в оценке вероятности наступления отдельного риска.

Правило 2:

$$\Sigma|Ai - Bi| / n < 25 \tag{4.10}$$

– направлено на согласование оценок экспертов в среднем. Оно используется после выполнения правила 1. Для расчетов расхождения оценки суммируются по модулю, и полученный результат делится на число простых рисков инвестиционного проекта. Оценки экспертов можно признать не противоречащими друг другу, если полученная величина не превышает 25.

Всего должно быть сделано 3 (при трех экспертах) попарных сравнения мнений для 1-го и 2-го, 1-го и 3-го, 2-го и 3-го экспертов. Если между мнениями экспертов обнаружены противоречия (невыполнение правил 1 и 2), они обсуждаются на совещаниях для выработки согласованной позиции по конкретному вопросу. Результат работы экспертов рекомендуем оформлять таблицей (см. табл. 3). Определение итоговой оценки по всем рискам проекта производится по формуле:

$$R = \Sigma WiPi, \tag{4.11}$$

где Pi – средняя вероятность наступления i-го риска. Расчет может быть представлен наглядно (см. табл. 4б). Таким образом, результаты количественного анализа, выполненного по данной методике, на наш взгляд, позволяют выделить наиболее значимые из простых рисков инвестируемых средств, а также дать им обобщенную оценку.

4. Практическое применение методики анализа и оценки риска на стадии инвестиционного проектирования

Как правило, реализация инвестиций сопряжена с основными видами рисков (табл. 4.5). В графе 3 приведены оценки приоритетов, которые отражают важность каждого отдельного события для всего инвестиционного проекта. Рассмотрено 13 простых рисков (n = 13), объединенных в 3 группы приоритетов (k = 3). Сделано предположение о том, что первый приоритет в 4 раза весомее третьего приоритета (f = 4).

Таблица 4.5

Риски реализации инвестиций

Риски, Si, $i = 1,n$	Отрицательное влияние на прибыль	Группа приоритета, Qj, $j = 1,k$
$S1$ – Рост цен на ГСМ $S2$ – Изношенность парка машин $S3$ – Недостаток оборотных средств $S4$ – Непредвиденные затраты из-за инфляции	Снижение прибыли из-за роста цен Увеличение затрат на ремонт Снижение прибыли из-за пополнения оборотных средств Увеличение объема заемных средств	$Q1$
$S5$ – Отношение местных властей $S6$ – Недостаточный уровень заработной платы $S7$ – Квалификация кадров $S8$ – Платежеспособность потребителей $S9$ – Рост налогов	Затраты на выполнение их требований Текучесть кадров Снижение ритмичности, увеличение аварий Падение прибыли Уменьшение чистой прибыли	$Q2$
$S10$ – Несвоевременная поставка комплектующих $S11$ – Недобросовестность подрядчика $S12$ – Зависимость от поставщиков $S13$ – Недостатки проектно- изыскательских работ	Увеличение срока ввода мощностей, выплата штрафов подрядчику Увеличение срока ввода мощностей Снижение прибыли из-за роста цен Рост стоимости строительства, задержка ввода мощностей	$Q3$

Для оценки вероятности наступления событий, относящихся к каждому простому риску инвестиционного проекта, мы использовали мнения трех экспертов (Э1 – Э3), которые оценивали вероятность наступления рисков, руководствуясь предложенной выше системой оценок (табл. 4.6а).

Оценим вероятность наступления рисков инвестиционного проекта. Для этого проведем анализ оценок экспертов на непротиворечивость (табл. 4.6б). Анализ показал приемлемую согласованность мнений экспертов и возможность использования их в расчетах, т.к. правила оценки непротиворечивости мнений экспертов выполняются: правило 1: max $|Эi – Эj| < 50$; правило 2: $\Sigma|Эi – Эj|/n = 12.3 < 25$.

Таблица 4.6а

Вероятность наступления рисков

Риски	Э1	Э2	Э3	Средняя вероятность, *Pi*
S1	85	80	80	82
S2	80	85	75	80
S3	70	75	80	75
S4	70	65	70	68
S5	50	45	45	47
S6	40	35	40	38
S7	30	35	40	35
S8	30	35	30	32
S9	25	30	35	30
S10	15	15	15	15
S11	15	10	10	12
S12	10	5	10	8
S13	5	10	5	7

Таблица 4.6б

Анализ непротиворечивости мнений экспертов

Риски	|Э1–Э2|	|Э1–Э3|	|Э2–Э3|	max $|Эi – Эj|$
S1	5	5	0	5
S2	5	5	10	10
S3	5	10	5	10
S4	5	0	5	5
S5	5	5	0	5
S6	5	0	5	5
S7	5	10	5	10
S8	5	0	5	5
S9	5	10	5	10
S10	0	0	0	0
S11	5	5	0	5
S12	5	0	5	5
S13	5	0	5	5
$\Sigma|Ai – Bi|/n =$				4,1025641
max $|Ai – Bi| =$				10

Далее необходимо определить удельный вес каждого простого риска по всей их совокупности. Для этого установим вес группы с наименьшим приоритетом, используя формулу (2): $W3 = 2/[3\cdot(4 + 1)] = 0.133$. Определим вес остальных групп приоритетов по формуле (3): $W1 = 0.133\cdot[(3 – 1)\cdot4 + 1 – 1]/(3 – 1) = 0.532$; $W2 = 0.133\cdot[(3 – 2)\cdot4 + 2 – 1]/(3 – 1) = 0.333$. Произведем расчет удельного веса простых рисков, применяя формулу (4): $W1 = W2 = W3 = W4 = 0.532/4 = 0.133$; $W5 = W6 = W7 = W8 = W9 = 0.333/5 = 0.067$; $W10 = W11 = W12 = W13 = 0.133/4 = 0.033$. Результаты расчетов сведем в табл. 4.7. Затем определим общую оценку риска инвестиций.

Результат анализа непротиворечивости мнений экспертов – все эксперты дали согласованные оценки. Если бы обнаружилось, что кто-то из экспертов дает резко противоположные оценки, то по возможности следовало бы исключить из рассмотрения его мнение. Но если это мнение имело серьезные основания – необходимо было бы провести дополнительное исследование.

Таблица 4.7

Удельные веса рисков. Общая оценка риска

Приоритеты, *Qj*	Веса, *Wi*	Простые риски, *Si*	Вероятность, *Pi*	Балл, *WiPi*
*Q*1	0,133	S1	82	10,93
	0,133	S2	80	10,67
	0,133	S3	75	10,00
	0,133	S4	68	9,07
*Q*2	0,067	S5	47	3,13
	0,067	S6	38	2,53
	0,067	S7	35	2,33
	0,067	S8	32	2,13
	0,067	S9	30	2,00
*Q*3	0,033	S10	15	0,50
	0,033	S11	12	0,40
	0,033	S12	8	0,27
	0,033	S13	7	0,23
Итого по всем рискам	1,000			54,20

Определенная нами общая оценка риска инвестиционного проекта составила 54,15 балла и свидетельствует о средней его рискованности.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Басовский Л.Е. Прогнозирование и планирование в условиях рынка: учеб. пособие / Л.Е. Басовский. – М. : ИНФРА-М, 2008. – 260 с.

2. Галенко В.П. Бизнес-план. Практикум / В.П. Галенко, Г.П. Самарина, О.А. Страхова. – М. : Бератор-Пресс, 2002. – 168 с.

3. Корчагин Ю.А. Инвестиции: теория и практика / Ю.А. Корчагин, И.П. Маличенко. – Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 509 с.

4. Кундышева, Е. С. Экономико-математическое моделирование : учебник для вузов : рек. УМО по образованию в обл. мат. методов в экономике / Е. С. Кундышева. – 3-е изд. – М. : Дашков и К, 2010. – 423 с.

5. Кундышева, Е. С. Экономико-математическое моделирование [Текст] : учебник : рек. УМО по образованию / Е. С. Кундышева; под ред. Б. А. Суслакова. – М. : Дашков и К, 2008. – 423 с.

6. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах: учебник / О.И. Ларичев. – М. : Университетская книга, Логос, 2006. – 392 с.

7. Макарова С.И. Экономико-математические методы и модели. Задачник: учеб.-практ. пособие / С.И. Макарова, С.А. Севастьянова. – М. : КНОРУС, 2009. – 208 с.

8. Просветов Г. И. Математические методы в экономике: учеб.-метод. пособие [для вузов] – М. : РДЛ, 2005.

9. Просветов Г.И. Математические методы и модели в экономике: задачи и решения: учеб.-практ. пособие / Г.И. Просветов. – М. : «Альфа-Пресс», 2008. – 344 с.

10. Просветов Г.И. Эконометрика: задачи и решения: учеб.-метод. пособие / Г.И. Просветов. – М. : РДЛ, 2007. – 192 с.

11. Просветов Г.И. Экономика предприятия: задачи и решения: учеб.-практ. пособие / Г.И. Просветов. – М. : «Альфа-Пресс», 2008. – 557 с.

12. Просветов, Г. И. Анализ данных с помощью Excel: задачи и решения [Текст] : учеб.-практ. пособие [для вузов] / Г. И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2009. – 157 с.

13. Савельева Н.А. Бизнес-план предприятия. Теория и практика / Н.А. Савельева, И.Ю. Бринк. – Ростов н/Д: Феникс, 2007. – 384 с.

14. Ширяев, В. И. Модели финансовых рынков. Оптимальные портфели, управление финансами и рисками [Текст] : учеб. пособие для вузов : / В. И. Ширяев. – Изд. 2-е. – М. : ЛИБРОКОМ : URSS, 2009. – 214 с.

15. Ширяев, В. И. Модели финансовых рынков. Оптимальные портфели, управление финансами и рисками [Текст] : учеб. пособие для вузов : / В. И. Ширяев. – М. : КомКнига, 2007. – 214 с.

16. Эконометрика: учеб. для вузов : рек. М-вом образования РФ / И. И. Елисеева [и др.]; под ред. И. И. Елисеевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Финансы и статистика, 2008. – 575 с.

17. Эконометрика: учебник для вузов : рек. УМО по образованию в обл. статистики / И. И. Елисеева [и др.]; под ред. И. И. Елисеевой. – М. : Проспект, 2009. – 288 с.

18. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева [и др.]. – М.: Проспект, 2009. – 288 с.

19. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие / С.И. Макарова [и др.]. – М. : КНОРУС, 2009. – 240 с.

Учебное издание

Болданова Елена Владимировна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Технический редактор
А. С. Ларионова

ИД № 06318 от 26.11.01.
Подписано в печать 01.07.15. Формат 60x90 1/16. Бумага офсетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 8,7. Тираж 100 экз.

Издательство Байкальского государственного университета
экономики и права.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.